Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Test 19

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

I FELADATSOR (30 pont)

5p **1.** A $(b_n)_{n\geq 1}$ mértani haladványban $b_1 = 2$ és az állandó hányados $q=\sqrt{5}$. Számítsd ki a b_4 tag egész részét.

5p **2.** Tekintsük az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-3$ bijektív függvényt. Határozzátok meg az f és f^{-1} függvények metszéspontjának abszcisszáját.

5p **3.** A valós számok halmazán oldjátok meg a $\log_2\left(2x^2+x+1\right)-\log_2\left(x^2-x+2\right)=1$ egyenletet.

5p **4.** Számítsátok ki annak a valószínűségét, hogy kiválasztva a kétjegyű természetes számok halmazából egy számot, az illető szám számjegyeinek összege osztható legyen 11-el.

5p **5.** Adottak az $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}$ és $\vec{v}=a\vec{i}-2\vec{j}$ vektorok, ahol a egy valós szám. Határozzátok meg az a valós szám értékét, amelyre $|\vec{u}+\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2$.

5p **6.** Ha $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, amelyre $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos x$, akkor igazoljátok, hogy $x=\frac{\pi}{8}$.

II FELADATSOR (30 pont)

1. Adott az $A(m)=\begin{pmatrix} m & 1 & 1\\ 2 & m+1 & 1\\ 1 & 1 & m+1\end{pmatrix}$ mátrix és az $\begin{cases} mx+y+z=1\\ 2x+(m+1)y+z=2\\ x+y+(m+1)z=m+1\end{cases}$ egyenletrendszer, ahol m egy valós szám.

5p **a)** Mutassátok ki, hogy $\det\left(A(0)\right)=0$.

5p **b)** Igazold, hogy $m=-3$ estén az egyenletrendszernek **nincs** megoldása.

5p **c)** Igazold, hogy bármely m valós szám esetén , az egyenletrendszernek legtöbb egy megoldása lehet.

2. A komplex számok halmazán értelmezzük a $z_1\circ z_2=z_1+z_2-\frac{1}{2}\overline{z}_1-\frac{1}{2}\overline{z}_2$ műveletet, ahol $\overline{z}$ a z komplex szám konjugáltja.

5p **a)** Mutassátok ki, hogy $(1+i)\circ(1-i)=1$.

5p **b)** Tekintsük a $H=\{2+bi \mid b\in\mathbb{R}\}$ halmazt. Igazoljátok, hogy H zárt részhalmaza a $\mathbb{C}$ halmaznak a „$\circ$" műveletre nézve.

5p **c)** Tekintsük a z_0 komplex számot. Igazoljátok, hogy létezik végtelen olyan z komplex szám, amelyekre $z_0\circ z$ egy valós szám.

III FELADATSOR (30 pont)

1. Adott az $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x+2}$ függvény.

5p **a)** Mutassátok ki, hogy $f'(x)=\dfrac{(x-1)(x+1)}{\sqrt[3]{\left(x^3-3x+2\right)^2}}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Számítsátok ki a $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}$ határértéket.

5p **c)** Igazoljátok, hogy bármely $a\in(0,+\infty)$ esetén, az $f(x)=a$ egyenletnek egyetlen megoldása van.

2. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(x^2+2\right)e^{-x}$ függvény.

5p **a)** Mutassátok ki, hogy $\int\limits_1^4 e^x f(x)\,dx=27$.

5p **b)** Számítsátok ki $\int\limits_1^e f(\ln x)\,dx$.

5p **c)** Mutassátok ki, hogy $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\int\limits_0^x f(t)\,dt=2$.