

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Test 19

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

I. FELADATSOR

(30 punct)

- 5p 1. Határozd meg az a și b racionális számokat, ha $\frac{1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{3+\sqrt{8}} = a + b\sqrt{2}$.
- 5p 2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$ függvény. Igazold, hogy $f(2020) + f\left(\frac{1}{2020}\right) = 3$.
- 5p 3. Oldd meg a valós számok halmazán a $4^x - 4^{\frac{2x+3}{2}} = -7$ egyenletet!
- 5p 4. Hány olyan $f: \{1,2,3\} \rightarrow \{0,1,2\}$ függvény van, amelyre igaz, hogy $f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) = 0$.
- 5p 5. Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben adott az $ABCD$ paralelogramma, amelynek három csúcsa $A(-1,3)$, $B(3,5)$ és $C(-4,-2)$. Határozd meg az AD egyenes egyenletét!
- 5p 6. Határozd meg az $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ értékét, ha $\operatorname{tg} 2x = -1$.

II. FELADATSOR

(30 pont)

1. Adott az $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & a \end{pmatrix}$ mátrix és az $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ y+3z=4 \\ 2x-y+az=2 \end{cases}$ egyenletrendszer, ahol a egy valós szám.
- 5p a) Igazold, hogy $\det(A(1)) = 18$.
- 5p b) Határozd meg mindazon a valós számok halmazát, amelyekre az egyenletrendszernek egyetlen megoldása van!
- 5p c) Ha $a = 1$, oldd meg az egyenletrendszert!
2. A valós számok halmazán értelmezett a következő művelet: $x * y = 2xy - x - y + 1$.
- 5p a) Igazold, hogy $2 * \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.
- 5p b) Határozd meg az a valós számot, ha $a * x = a$, bármely x valós szám esetén!
- 5p c) Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$ függvény. Igazold, hogy bármely x és y valós számok esetén $f(x * y) = f(x) \cdot f(y)$.

III. FELADATSOR

(30 pont)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \ln(2^x + 1)$ függvény.
- 5p a) Igazold, hogy $f'(x) = 1 - \frac{2^x \ln 2}{2^x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Bizonyítsd be, hogy f növekvő függvény.
- 5p c) Határozd meg az f grafikus képének $-\infty$ -be mutató ágához húzható ferde aszimptota egyenletét.
2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x+2)\sin x$ függvény.
- 5p a) Igazold, hogy $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{x+2} dx = 1$.

5p b) Számítsd ki: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$.

5p c) Határozd meg az n természetes számot, ha $n \geq 2$ és $\int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\sin^2 x}{f^2(x)} dx = \frac{1}{9}$.