Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

20. teszt

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Minden tétel kötelező. 10 pont jár hivatalból.**
- **A munkaidő 3 óra.**

I. TÉTEL **(30 pont)**

5p **1.** Igazold, hogy az $A = z(2+3i) + \overline{z}(2-3i)$ egy valós szám, bármely z komplex szám esetén, ahol $\overline{z}$ a z konjugáltja!

5p **2.** Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6x+7$ függvény. Igazold, hogy $f(\sqrt{2})\cdot f(1+\sqrt{2})\cdot f(2+\sqrt{2})\cdot\ldots\cdot f(10+\sqrt{2})=0$.

5p **3.** Oldd meg a $\lg(x^2+x-2)=1+\lg\frac{x-1}{2}$ egyenletet a valós számok halmazán!

5p **4.** Számítsd ki annak a valószínűségét, hogy kiválasztva egy számot a kétjegyű természetes számok halmazából, a szám számjegyeinek szorzata 51-nél nagyobb legyen!

5p **5.** Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben adottak az $A(4,6)$, $B(-3.-1)$ és $C(-2,-2)$ pontok. Igazold, hogy az $M(1,2)$ pont az ABC háromszög köré írt kör középpontja!

5p **6.** Legyen R az ABC háromszög köré írt kör sugara és r az ABC háromszögbe írt kör sugara. Tudva, hogy $\sin A+\sin B+\sin C=\frac{1}{rR}$, igazold, hogy az ABC háromszög területe egyenlő 1.

II. TÉTEL **(30 pont)**

1. Adott az $A(m)=\begin{pmatrix}2 & 1 & m\\ 4 & 1 & m\\ 1 & -m & -1\end{pmatrix}$ mátrix és a $\begin{cases}2x+y+mz=4\\ 4x+y+mz=6\\ x-my-z=-1\end{cases}$ egyenletrendszer, ahol m valós szám.

5p **a)** Igazold, hogy $\det(A(0))=2$.

5p **b)** Határozd meg m azon valós értékeinek halmazát, amelyekre az $A(m)$ mátrix invertálható.

5p **c)** Igazold, hogy bármely $m\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ esetén az egyenletrendszer (x_0,y_0,z_0) megoldására teljesül az $\frac{y_0}{z_0}=x_0$ összefüggés.

2. A valós számok halmazán értelmezzük az $x*y=x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}$ műveletet.

5p **a)** Igazold, hogy $2*(-2)=0$.

5p **b)** Ellenőrízd, hogy $e=0$ semleges elem-e a „$*$” műveletre nézve!

5p **c)** Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^{2x}-1}{2e^x}$ függvény. Igazold, hogy $f(x)*f(y)=f(x+y)$ bármely x és y valós számok esetén.

III. TÉTEL **(30 pont)**

1. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^x}{\sqrt{x^2+1}}$ függvény.

5p **a)** Igazold, hogy $f'(x)=\dfrac{e^x\left(x^2-x+1\right)}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Számı́tsd ki: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$.

5p **c)** Határozd meg az f függvény képhalmazát!

2. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4}$ függvény.

5p **a)** Igazold, hogy $\int\limits_0^2 f(x)\,dx=\dfrac{\pi}{8}$.

5p **b)** Minden n természetes számra értelmezzük az $I_n=\int\limits_0^1 f^n(x)\,dx$ számot. Igazold, hogy $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$.

5p **c)** Határozd meg azt az a valós számot, $a>0$, amelyre $\int\limits_0^a x\,f(x)\,dx=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5}{4}$.