**Examenul de bacalaureat naţional 2020**
**Proba E. c)**

**Matematică *M_şt-nat***

**Test 20**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

## I. FELADATSOR (30 pont)

**5p** **1.** Igazold, hogy ha $a$ egy valós szám és $i^2=-1$, akkor a $z=(a+2i)^2+(a-2i)^2$ szám valós!

**5p** **2.** Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-\frac{2x}{x^2+1}$ függvény. Igazold, hogy bármely $x$ valós szám esetén $f(x)\le 1$.

**5p** **3.** Oldd meg a valós számok halmazán a $3^{\frac{x+1}{2}}=2\cdot 2^x$ egyenletet!

**5p** **4.** Hány olyan $f:\{1,2,3\}\to\{1,2,3,4\}$ függvény van, amely szigorúan növekvő?

**5p** **5.** Az $xOy$ derékszögű koordináta-rendszerben az $ax+y-5=0$ és $x-4y+3=0$ egyenletű egyenesek párhuzamosak egymással. Határozd meg az $a$ valós számot!

**5p** **6.** Határozd meg az $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ értékét, ha $\operatorname{tg}x+3\operatorname{ctg}x=2\sqrt{3}$.

## II. FELADATSOR (30 pont)

**1.** Adott az $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ mátrix és az $\begin{cases}x+z=1\\y+z=2\\x+y=a\end{cases}$ egyenletrendszer, ahol $a$ valós szám.

**5p** **a)** Igazold, hogy $\det A=-2$.

**5p** **b)** Igazold, hogy a $B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$ mátrix az $A$ mátrix inverzze!

**5p** **c)** Határozd meg az $a$ valós számot, ha $(x_0,y_0,z_0)$ az egyenletrendszer megoldása és $x_0$, $y_0$, $z_0$ egy számtani haladvány egymásutáni tagjai.

**2.** A komplex számok halmazán értelmezett $z_1\circ z_2=iz_1z_2+z_1+z_2$ művelet asszociatív és rendelkezik semleges elemmel.

**5p** **a)** Igazold, hogy $i\circ i=i$.

**5p** **b)** Bizonyítsd be, hogy $z_1\circ z_2=i(z_1-i)(z_2-i)+i$, bármely $z_1$ és $z_2$ komplex számok esetén!

**5p** **c)** Bizonyítsd be, hogy az $\frac{1}{2}(1+i)$ szám szimmetrikusa a „$\circ$” műveletre nézve egy valós szám!

## III. FELADATSOR (30 pont)

**1.** Adott az $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^n-n\ln x+1$ függvény, ahol $n$ egy nullától különböző természetes szám.

**5p** **a)** Igazold, hogy $f'(x)=\frac{n(x^n-1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

**5p** **b)** Igazold, hogy $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-x^n}{x}=0$, bármely nullától különböző $n$ természetes szám esetén!

**5p** **c)** Határozd meg mindazon $a$ valós számok halmazát, amelyekre az $f(x)=a$ egyenletnek van megoldása a $(0,1]$ intervallumban.

**2.** Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+1$ függvény.

**5p** **a)** Igazold, hogy $\int_0^3 f(x)\,dx=12$.

**5p** **b)** Számítsd ki: $\int_0^1 f(x)e^{x^3+3x}\,dx$.

**5p** **c)** Igazold, hogy $15\int_0^1 f^7(x)\,dx-14\int_0^1 f^6(x)\,dx=128$.