

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Testul 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Igazolja, hogy $a = 3 + 4\sqrt{3} - (2 + \sqrt{3})^2$ egy egész szám!
- 5p 2. Adottak az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$ és $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 4x^2 + 2x$ függvények. Határozza meg az f és g függvények grafikus képei metszéspontjainak abszcisszáit!
- 5p 3. Oldja meg a valós számok halmazán a $2^{x^2+4x+2} = 64 \cdot 2^x$ egyenletet!
- 5p 4. Számítsa ki annak valószínűségét, hogy az $A = \{-2, -1, 1, 3, 4\}$ halmazból tetszőlegesen kiválasztott a szám teljesítse a $\sqrt{a^2 - 2a + 1} \geq 3$ egyenlőtlenséget!
- 5p 5. Az xOy derékszögű koordináta rendszerben adott az $MNPQ$ paralelogramma, ahol $M(2,3)$, $N(5,4)$ és $P(4,0)$. Határozza meg az MQ egyenes egyenletét!
- 5p 6. Az ABC háromszög egy 5 sugarú körbe van írva. Igazolja, hogy $\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{1000}$.

SUBIECTUL II

(30 de puncte)

1. Adott az $A(a,b) = \begin{pmatrix} a & a-2 \\ b+1 & b-1 \end{pmatrix}$ mátrix, ahol a és b valós számok.
- 5p a) Igazolja, hogy $\det(A(1,0)) = 0$.
- 5p b) Bizonyítsa be, hogy ha $a \in (-\infty, 0)$ és $b \in (0, +\infty)$, akkor az $A(a,b)$ mátrix invertálható!
- 5p c) Határozza meg az $X \in M_2(\mathbb{R})$ mátrixot, amelyre $A(1,3) \cdot X = A(2,1)$
2. A valós számok halmazán értelmezett az $x \circ y = 3xy - (x + y) + \frac{2}{3}$ asszociatív művelet.
- 5p a) Igazolja, hogy $1 \circ (-1) = -\frac{7}{3}$.
- 5p b) Bizonyítsa be, hogy $x \circ y = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(y - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}$, bármely x és y valós számok esetén!
- 5p c) Számítsa ki $1 \circ \frac{1}{\sqrt{2}} \circ \frac{1}{\sqrt{3}} \circ \dots \circ \frac{1}{\sqrt{2021}}$.

SUBIECTUL III

(30 de puncte)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2 + 1}$ függvény.
- 5p a) Igazolja, hogy $f'(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Bizonyítsa be, hogy az $y = 2021$ egyenletű egyenes párhuzamos az f függvény grafikus képéhez $+\infty$ -ben húzott aszimptotájával!
- 5p c) Határozza meg az f függvény grafikus képének inflexiós pontjait!

2. Adott $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x \sin x$ függvény.

5p a) Igazolja, hogy $\int_1^2 \frac{f(x)}{\sin x} dx = e(e-1)$.

5p b) Számítsa ki $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$.

5p c) Igazolja, hogy $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{f(x)} dx = -\frac{\ln 2}{\sqrt{e^\pi}}$.