Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Testul 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Határozza meg az $(a_n)_{n\geq 1}$ számtani haladvány első hét tagjának az összegét, tudva azt, hogy $a_1=-5$ és az állandó különbsége $r=8$!

5p **2.** Határozza meg az a nem nulla valós értékeit, amelyekre az $ax^2-x-a-1=0$ egyenletnek két különböző megoldása van a valós számok halmazán!

5p **3.** Oldja meg a valós számok halmazán a $3x-\sqrt[3]{x^3+x^2-9}=2x$ egyenletet!

5p **4.** Számítsa ki $5A_3^2-3C_5^3$!

5p **5.** Adottak az $\vec{a}=2\vec{i}+m\vec{j}$ és $\vec{b}=5\vec{i}-\left(m^2+1\right)\vec{j}$ vektorok, ahol m egy valós szám. Határozza meg azokat az m valós számokat, amelyekre $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok kollineárisak!

5p **6.** Adott az ABC háromszög, amelyben $AB>BC$, $AC=6$, $BC=10$ és a területe 15. Határozza meg a C szög mértékét!

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Adottak az $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ mátrixok és $M(a,b)=aI_2+bA$, ahol a és b valós számok.

5p **a)** Igazolja, hogy $\det A=0$!

5p **b)** Bizonyítsa be, hogy $M(a,b)\cdot M(x,y)=M(ax,ay+bx)$, minden a, b, x és y valós számra!

5p **c)** Igazolja, hogy ha x és y olyan valós számok, amelyekre $B=M(x,2y)+M(y,2x)$ és $C=M\left(x\sqrt{2},1\right)\cdot M\left(y\sqrt{2},1\right)$ mátrixok egyenlőek, akkor $x^2+y^2=0$!

2. A valós számok halmazán értelmezzük az $x*y=xy+2x+2y+2$ és $x\circ y=x+y+2$ műveleteket.

5p **a)** Igazolja, hogy $(1*2)\circ(1*3)=1*(2\circ3)$!

5p **b)** Bizonyítsa be, hogy $x*e=e$, bármely x valós szám esetén, ahol e a „$\circ$”művelet semleges eleme!

5p **c)** Határozza meg azt az n természetes számot, amelyre $n*(-n)\geq n\circ(-n)$!

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x-1+\sqrt{x^2-x+1}, & x\in(-\infty,0)\\ x\ln(x+1), & x\in[0,+\infty)\end{cases}$ függvény.

5p **a)** Igazolja, hogy az f függvény folytonos az $\mathbb{R}$-en!

5p **b)** Bizonyítsa be, hogy az f függvény konvex a $(0,+\infty)$ intervallumon!

5p **c)** Igazolja, hogy bármely a, $a<0$ valós számra, az f függvény grafikus képének az $A\left(a,f(a)\right)$ pontjába húzott érintője **nem** párhuzamos az Ox tengellyel!

2. Adottak az $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}$ és $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{1+x\sqrt{x}}{x^2}$ függvények.

5p **a)** Bizonyítsa be, hogy az f egy primitív függvénye a g függvénynek!

5p **b)** Számítsa ki $\int_{\frac{1}{4}}^{4} g(x)\,dx$!

5p **c)** Határozza meg azt az m, $m \in (0,1)$ valós számot, amelyre $\int_{m}^{1} f^2(x) g(x)\,dx = \frac{1}{3}$!