

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E.c)

Matematică M_mate-info

Testul 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

I. FELADATSOR

(30 punct)

- 5p** 1. Igazolja, hogy $\sqrt[3]{4}$, $\log_3 9$ és $\sqrt[3]{16}$ egy mértani haladvány egymás utáni tagjai!
- 5p** 2. Adott egy $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ páratlan függvény. Igazolja, hogy a $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = (f(x))^2$ függvény páros!
- 5p** 3. Oldja meg a valós számok halmazán a $2^{2x} - \sqrt{2} \cdot 2^x = 2^{x+1} - 2\sqrt{2}$ egyenletet!
- 5p** 4. Adott az $\left(x\sqrt{x} + \frac{1}{x^2}\right)^{10}$ kifejtés, ahol $x \in (0, +\infty)$. Határozza meg a kifejtésnek azt a tagját, amely tartalmazza az x^8 -t!
- 5p** 5. Az ABC háromszög síkjában adott az M pont úgy, hogy $\overline{2AM} = \overline{AB} + \overline{AC}$. Tudva, hogy $\overline{BC} = k \cdot \overline{CM}$, határozd meg a k valós számot!
- 5p** 6. Határozza meg az $x \in (0, \pi)$ értékét, ha $\sin 2x + 6 \cos x - \sin x - 3 = 0$.

II. FELADATSOR

(30 pont)

1. Adott az $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ és az $M(m) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & m & 1 \\ m-1 & m & -m \end{pmatrix}$ mátrix, ahol m valós szám.
- 5p** a) Igazolja, hogy $\det A = -1$.
- 5p** b) Igazolja, hogy bármely m valós szám esetén az $M(m)$ mátrix rangja legalább 2-vel egyenlő!
- 5p** c) Határozza meg az m , $m \neq -1$ valós számot, tudva azt, hogy az $M(m)$ mátrix inverze az A mátrix!
2. A komplex számok halmazán értelmezzük a $z_1 \circ z_2 = z_1 + z_2 + z_1 z_2$ műveletet.
- 5p** a) Igazolja, hogy $(2+i) \circ (2-i) = 9$.
- 5p** b) Igazolja, hogy bármely a nem nulla valós szám esetén az $A = (-1 + (a+1)i) \circ (-1 + (a-1)i)$ szám valós és szigorúan kisebb, mint 0.
- 5p** c) Határozza meg a z komplex számokat, amelyekre $z \circ z = -5$.

III. FELADATSOR

(30 pont)

1. Adott az $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \frac{x+1}{x+3}$ függvény.
- 5p** a) Igazolja, hogy $f'(x) = \frac{2}{(x+1)(x+3)}$, $x \in (-1, +\infty)$.
- 5p** b) Határozza meg az f függvény grafikus képéhez tartozó függőleges aszimptota egyenletét!
- 5p** c) Számítsa ki $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x f(x))$.
2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + 1)e^{-x}$ függvény.

5p a) Igazolja, hogy $\int_0^1 (e^x f(x) - 2) dx = -\frac{2}{3}$.

5p b) Számítsa ki $\int_1^e f(\ln x) dx$.

5p c) Minden, nullától különböző n természetes szám esetén adott az $I_n = \int_0^1 x^n f(x) dx$ szám. Számítsa ki a $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ határértéket!