

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

Testul 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

I. FELADATSOR

(30 punct)

- 5p 1. Számítsa ki az $x = \log_6 8 + \log_6 27$ és $y = \sqrt{2^2 \cdot 3^3 + 6^2}$ számok mértani középárányosát!
- 5p 2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x + a$ függvény, ahol a egy valós szám. Határozza meg azokat az a valós számokat, amelyekre az f függvény grafikus képe az Ox tengelyt két különböző pontban metszi!
- 5p 3. Oldja meg a valós számok halmazán a $7^{2-x^2} = 7^{2x-1}$ egyenletet!
- 5p 4. Bizonyítsa be, hogy a V_5^2 , C_6^2 és V_4^2 számok szorzata egy természetes szám négyzetével egyenlő!
- 5p 5. Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben adottak az $A(-1, a+1)$, $B(2, -3)$ és $C(3, 1-a)$ pontok, ahol a valós szám. Határozza meg azt az a valós számot, amelyre az A , B és C pontok kollineárisak!
- 5p 6. Határozza meg az N -ben derékszögű MNP háromszögbe írt kör sugarának hosszát, ha $MN = 12$ és $NP = 16$.

II. FELADATSOR

(30 pont)

1. Adott az $A(a) = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -a \\ 1 & a & -1 \end{pmatrix}$ mátrix és az $\begin{cases} ax + 2y + z = 1 \\ 2x + 4y - az = 1 \\ x + ay - z = 0 \end{cases}$ egyenletrendszer, ahol a valós szám.
- 5p a) Igazolja, hogy $\det(A(1)) = -3$.
- 5p b) Határozza meg azokat az a valós számokat, amelyekre az $A(a)$ mátrix invertálható!
- c) Bizonyítsa be, hogy az egyenletrendszernek **nincs** olyan (x_0, y_0, z_0) megoldása, amelyre
- 5p $x_0 = \frac{y_0}{2} = \frac{z_0}{3}$.
2. A valós számok halmazán értelmezzük az $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3 - 27}$ asszociatív műveletet.
- 5p a) Igazolja, hogy $2021 * (-2021) = -3$.
- 5p b) Határozza meg a „ $*$ ” művelet semleges elemét!
- 5p c) Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x+27}$ függvény. Bizonyítsa be, hogy $f(x) * f(y) = f(x+y)$, bármely x és y valós számok esetén!

III. FELADATSOR

(30 pont)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3 + 3}{x^6 + 7}$ függvény.
- 5p a) Igazolja, hogy $f'(x) = \frac{-3x^2(x^3 - 1)(x^3 + 7)}{(x^6 + 7)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Határozza meg az f függvény grafikus képének aszimptotáit.

5p c) Bizonyítsa be, hogy $|f(x) - f(y)| \leq \frac{4}{7}$, bármely x és y valós számok esetén!

2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x+1}{e^{2x}}$ függvény!

5p a) Igazolja, hogy $\int_0^1 \frac{e^{3x} f(x)}{2x+1} dx = e - 1$.

5p b) Számítsa ki: $\int_0^1 e^x f(x) dx$.

5p c) Igazolja, hogy $\int_1^2 \frac{1}{x(x+2)} f\left(\frac{1}{x}\right) dx = \frac{e-1}{2e^2}$.