

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E.c)

Matematică *M_mate-info*

Testul 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

I. FELADATSOR

(30 punct)

- 5p 1. Határozza meg az $M = \{n \in \mathbb{N} | 2n + 1 < 10\}$ halmaz elemeinek számát!
- 5p 2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 10x + m$ függvény, ahol m egy valós szám. Határozza meg az m valós szám azon értékét, amelyre az f függvényhez rendelt parabola csúcsa az Ox tengelyen van!
- 5p 3. Oldja meg a valós számok halmazán az $x + \sqrt{x-5} = 7$ egyenletet!
- 5p 4. Határozza meg annak a valószínűségét, hogy egy véletlenszerűen választott háromjegyű természetes szám **ne** legyen 5-nek többszöröse!
- 5p 5. Az xOy koordináta-rendszerben adottak az $A(3,4)$ és $B(-1,3)$ pontok. Határozza meg a C pont koordinátáit úgy, hogy $\overline{AB} + 2\overline{BC} = \vec{0}$.
- 5p 6. Adott az ABC hegyesszögű háromszög, amelyben $AB = 4$, $AC = 5$ és a háromszög területe egyenlő 6-tal. Számítsa ki az A szög koszinuszát!

II. FELADATSOR

(30 punct)

1. Adott az $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & a \\ 1 & 1 & a+1 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$ mátrix és az $\begin{cases} x + (a+1)y + az = 6a + 3 \\ x + y + (a+1)z = 4a + 7 \\ 2x + ay + z = 2a + 6 \end{cases}$ egyenletrendszer, ahol

a valós szám.

- 5p a) Igazolja, hogy $\det(A(a)) = 2(a^2 + 1)$, bármely a valós szám esetén!
- 5p b) Határozza meg azt az a valós számot, amelyre $A(a) \cdot A(0) = A(0) \cdot A(a)$.
- 5p c) Igazolja, hogy ha (x_0, y_0, z_0) az egyenletrendszer megoldása, akkor x_0 , y_0 és z_0 egy mértani haladvány egymás utáni tagjai!
2. Az $M = [0, +\infty)$ halmazon értelmezzük az $x * y = \frac{2(x+y)}{xy+2}$ műveletet.
- 5p a) Igazolja, hogy $x * 0 = x$, bármely $x \in M$ esetén!
- 5p b) Igazolja, hogy $x * y < 2$, bármely $x, y \in [1, +\infty)$ esetén!
- 5p c) Határozza meg azokat az (m, n) nem nulla természetes számokból álló számpárokat, amelyekre $m * n$ természetes szám!

III. FELADATSOR

(30 punct)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x(x^2 - 4x + 5)$ függvény.

- 5p a) Igazolja, hogy $f'(x) = e^x(x-1)^2$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Számítsa ki: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x)$.
- 5p c) Igazolja, hogy az f függvény grafikus képe bármely, az Ox tengellyel párhuzamos egyenest legtöbb egy pontban metsz!
2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x^3 + 1$ függvény.

- 5p** a) Igazolja, hogy $\int_0^1 f(x) dx = 2$.
- 5p** b) Számítsa ki $\int_0^1 x^2 (f(x))^3 dx$.
- 5p** c) Igazolja, hogy $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \ln(f(t)) dt = +\infty$.