Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Testul 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

I FELADATSOR (30 pont)

5p **1.** Határozza meg az $(a_n)_{n\geq 1}$ számtani haladvány a_{2021} tagját tudva azt, hogy $a_1 = 2$ és $a_3 = 8$.

5p **2.** Határozza meg az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 3$ függvény grafikus képe és a d: $y = -x + 3$ egyenletű egyenes metszéspontjának a koordinátáit!

5p **3.** Oldja meg a valós számok halmazán a $\sqrt{3^{x+2}} = 27$ egyenletet!

5p **4.** Határozza meg annak a valószínűségét, hogy tetszőlegesen választva egy elemet az $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ halmazból, az osztója legyen a 48-nak!

5p **5.** Adottak az $\vec{u} = 2\vec{i} + m\vec{j}$ és $\vec{v} = (m-4)\vec{i} + 2\vec{j}$ vektorok, ahol m egy valós szám**.** Határozza meg m étrékét, melyre $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

5p **6.** Adott az ABC háromszög, melyben $AB = 6$, $AC = 3$ és az A szög mértéke $120°$. Számítsa ki az ABC háromszög kerületét!

II FELADATSOR (30 pont)

1. Adott az $A(a) = \begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 1 & 2a & 1 \\ 1 & a & -1 \end{pmatrix}$ mátrix és az $\begin{cases} 2ax + y + z = 0 \\ x + 2ay + z = 1 \\ x + ay - z = -1 \end{cases}$ egyenletrendszer, ahol a egy valós szám.

5p **a)** Igazolja, hogy $det\big(A(-1)\big) = -3$.

5p **b)** Határozza meg az a valós értékét, melyre az egyenletrendszernek egyetlen megoldása van!

5p **c)** Határozza meg az a valós értékét tudva azt, hogy léteznek az y_0 és z_0 valós számok úgy, hogy $(1, y_0, z_0)$ az egyenletrendszer megoldása!

2. A valós számok halmazán értelmezett az $x \circ y = x + 5xy + y$ asszociatív művelet.

5p **a)** Ellenőrizze le, hogy $e = 0$ a „∘” művelet semleges eleme!

5p **b)** Bizonyítsa be, hogy $x \circ y = 5\left(x + \frac{1}{5}\right)\left(y + \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{5}$, bármely x és y valós számok esetén!

5p **c)** Számítsa ki a $q = \left(-\frac{1}{2}\right) \circ \left(-\frac{1}{3}\right) \circ \ldots \circ \left(-\frac{1}{2021}\right)$ szám egész részét!

III FELADATSOR (30 pont)

1. Adott az $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)\ln x$ függvény.

5p **a)** Igazolja, hogy $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} + \ln x$, $x \in (0,+\infty)$.

5p **b)** Határozza meg az f függvény grafikus képéhez az $A(1,0)$ pontba húzott érintő egyenletét!

5p **c)** Bizonyítsa be, hogy az f függvény konvex az $(1,+\infty)$ intervallumon!

2. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^n + 1}{x^2 + 1}$ függvény, ahol n egy zérótól különböző természetes szám.

5p **a)** Ha $n = 3$, legyen $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = (x^2+1)f(x)$ egy függvény. Határozza meg a g függvény egy olyan G primitív függvényét, melyre $G(0) = 2021$.

5p **b)** Ha $n = 1$, számítsa ki $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **c)** Igazolja, hogy $\frac{\pi}{4} \leq \int_0^1 f(x)dx \leq 1$, bármely n, $n \geq 2$ természetes szám esetén!