

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E.c)

Matematică *M_mate-info*

Testul 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

I. FELADATSOR

(30 punct)

- 5p 1. Határozza meg az $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \sqrt[3]{7} < x \leq \log_2 21\}$ halmaz elemeinek szorzatát!
- 5p 2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4x$ függvény. Határozza meg az f függvény grafikus képe és az $y = 5x + 2$ egyenletű d egyenes metszéspontjainak abszcisszáit!
- 5p 3. Oldja meg a valós számok halmazán a $2 \cdot 9^x - 3^{2x} - 3 = 0$ egyenletet!
- 5p 4. Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a háromjegyű természetes számok halmazából véletlenszerűen választott szám számjegyei egymástól különböző prímszámok legyenek!
- 5p 5. Az ABC háromszög síkjában adott az M pont úgy, hogy $2\vec{MB} - \vec{MC} = \vec{AB}$. Igazolja, hogy az $AMBC$ négyszög paralelogramma!
- 5p 6. Számítsa ki $\operatorname{tg} x$ -et tudva, hogy $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ és $\sin x = -\frac{8}{17}$.

II. FELADATSOR

(30 pont)

1. Adott az $A(a) = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & a \\ 1 & -1 & -a \\ 2-a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix és az $\begin{cases} (a+1)x + y + az = -5 \\ x - y - az = 10 \\ (2-a)x + y + z = 1-a \end{cases}$ egyenletrendszer, ahol a egy valós szám.
- 5p a) Igazolja, hogy $\det(A(2)) = 4$.
- 5p b) Határozza meg azon a valós számokat, amelyekre az egyenletrendszer **nem** összeférhető határozott!
- 5p c) Határozza meg azt az a természetes számot, amelyre az egyenletrendszernek egyetlen (x_0, y_0, z_0) megoldása van és x_0 egész szám!
2. A valós számok halmazán értelmezzük az $x * y = x + y - \frac{xy}{5}$ asszociatív műveletet, melynek van semleges eleme.
- 5p a) Igazolja, hogy $1 * 5 = 5$.
- 5p b) Határozza meg az x , $x \geq 0$ valós számot, amelyre $\sqrt{x} * \sqrt{x} = 5$.
- 5p c) Határozza meg azokat az a , $a \neq 5$ valós számokat, amelyekre a „ $*$ ” művelet szerinti szimmetrikusa az a -nak szigorúan kisebb, mint 0 .

III. FELADATSOR

(30 pont)

1. Adott az $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)\ln(x+1)$ függvény.
- 5p a) Igazolja, hogy $f'(x) = 1 + \ln(x+1) - \frac{2}{x+1}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Számítsa ki $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) f\left(\frac{1}{x}\right) \right)$.
- 5p c) Igazolja, hogy az f függvény grafikus képének bármely két különböző érintője metszi egymást!

2. Adott az $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x+1}}$ függvény.

5p a) Igazolja, hogy $\int_1^2 x\sqrt{x+1}f(x)dx = 7$.

5p b) Számítsa ki: $\int_0^1 f^2(x)dx$.

5p c) Tudva azt, hogy az $F: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = 2(x+1)\sqrt{x+1} - 6\sqrt{x+1} + 4$ egy primitív függvénye az f függvénynek igazolja, hogy $\int_0^3 f(x)F(x)dx = 32$.