

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

• Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.

• Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

I. FELADATSOR

(30 punct)

- 5p 1. Igazolja, hogy $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} > \frac{3}{4}$.
- 5p 2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -3x + 18$ függvény. Határozza meg az $f \circ f$ függvény grafikus képének az Ox tengellyel való metszéspontjának az abszcisszáját!
- 5p 3. Oldja meg a valós számok halmazán a $2^{3-x} - 2^{2-x} + 2^{5-x} = 9$ egyenletet!
- 5p 4. Határozza meg az $\left(x^3 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{14}$, $x \in (0, +\infty)$ kifejtésnek azt a tagját, amely **nem** tartalmazza x -et!
- 5p 5. Az xOy derékszögű koordináta rendszerben adottak az $A(a, 1)$ és $B(-2, 5)$ pontok, ahol a egy valós szám. Határozza meg az a valós szám értékét tudva, hogy az AB szakasz felezőpontja az $y = 2x + 3$ egyenletű egyenesen található!
- 5p 6. Számítsa ki az ABC háromszög AB oldalának a hosszát, tudva azt, hogy $\operatorname{tg} C = 1$, valamint az ABC háromszög beírható egy 3 sugarú körbe!

II. FELADATSOR

(30 pont)

1. Adott az $A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix, ahol a egy valós szám.
- 5p a) Mutassa ki, hogy $\det(A(3)) = 10$.
- 5p b) Bizonyítsa be, hogy bármely n , $n \geq 2$ természetes szám esetén az $A(n)$ mátrix rangja 3.
- 5p c) Igazolja, hogy bármely m , $m \geq 2$ természetes szám esetén az $A(m)$ mátrix **nem** minden eleme egész szám!
2. Az $M = (2, +\infty)$ halmazon értelmezzük az $x \circ y = \frac{xy - 4}{x + y - 4}$ asszociatív műveletet.
- 5p a) Mutassa ki, hogy $8 \circ 8 = 5$.
- 5p b) Igazolja, hogy $(x + 2) \circ (y + 2) > (x + y) \circ 4$, bármely $x, y \in M$ esetén!
- 5p c) Ha $x \in M$ és n , $n \geq 2$ természetes szám úgy, hogy $\underbrace{x \circ x \circ x \circ \dots \circ x}_{2^n\text{-szer } x} = 2^n - \frac{1}{2^n}$, igazolja, hogy x egy természetes szám négyzete!

III. FELADATSOR

(30 pont)

1. Adott az $f: (3, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x - 3) - 2\ln(x^2 - 9)$ függvény.
- 5p a) Igazolja, hogy $f'(x) = \frac{3(1-x)}{x^2 - 9}$, $x \in (3, +\infty)$.
- 5p b) Mutassa ki, hogy f egy bijektív függvény!

5p c) Igazolja, hogy $\lim_{x \rightarrow 3} ((x-3)f(x)) = 0$.

2. Adott az $f: (-2,2) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \frac{x^2}{x^2 - 4}$ függvény.

5p a) Mutassa ki, hogy $\int_1^{\frac{3}{2}} \left(f(x) - \frac{x^2}{x^2 - 4} \right) dx = \frac{5}{8}$.

5p b) Igazolja, hogy $\int_{-1}^1 (f(x) + f(-x)) dx = 4(1 - \ln 3)$.

5p c) Határozza meg az $a \in (0, \sqrt{3})$ értékét, tudva azt, hogy $\int_a^{\sqrt{3}} \sqrt{x - f(x)} dx = \sqrt{3} - 1$.