

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

I. FELADATSOR

(30 punct)

- 5p 1. Határozza meg az $(a_n)_{n \geq 1}$ számtani haladvány negyedik tagját, tudva azt, hogy $a_3 = 5$ és $a_5 = 11$.
- 5p 2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$ függvény. Határozza meg az a valós számot, tudva azt, hogy $f(a) = f(a+1)$.
- 5p 3. Oldja meg a valós számok halmazán a $\sqrt{x^2 - x + 13} = x + 1$ egyenletet!
- 5p 4. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy kiválasztva egy számot a kétjegyű természetes számok halmazából, ennek számjegyei 3-nál szigorúan kisebbek lesznek!
- 5p 5. Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben adottak az $A(2,4)$, $B(-1,1)$ és $C(3,a)$ pontok, ahol a egy valós szám. Határozza meg az a valós számot, amelyre az OC és AB egyenesek merőlegesek egymásra!
- 5p 6. Mutassa ki, hogy $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos x$, bármely x valós szám esetén!

II. FELADATSOR

(30 pont)

1. Adott az $A(x) = \begin{pmatrix} 1+5x & -2x \\ 10x & 1-4x \end{pmatrix}$ mátrix, ahol x valós szám.
- 5p a) Igazolja, hogy $\det(A(1)) = 2$.
- 5p b) Bizonyítsa be, hogy $A(x) \cdot A(y) = A(x + y + xy)$, bármely x és y valós számok esetén!
- 5p c) Határozza meg azokat az (m,n) egész számpárokat, amelyekre $A(m)$ az $A(n)$ mátrix inverze!
2. A valós számok halmazán értelmezett az $x \circ y = xy + x + 2ay$ művelet, ahol a valós szám.
- 5p a) Igazolja, hogy $1 \circ 0 = 1$, bármely a valós szám esetén!
- 5p b) Határozza meg az a valós számot, tudva, hogy $x \circ 1 > 4$ akkor és csakis akkor, ha $x \in (3, +\infty)$.
- 5p c) Igazolja, hogy a „ \circ ” művelet akkor és csakis akkor asszociatív, ha $a = \frac{1}{2}$.

III. FELADATSOR

(30 pont)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{e^x}$ függvény.
- 5p a) Igazolja, hogy $e^x (f(x) + f'(x)) = 1$, bármely x valós szám esetén!
- 5p b) Határozza meg az f függvény grafikus képéhez tartozó vízszintes aszimptota egyenletét $+\infty$ felé!
- 5p c) Bizonyítsa be, hogy az $y = x$ egyenletű egyenes érintője az f függvény grafikus képének!
2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x$ függvény.
- 5p a) Igazolja, hogy $\int_0^{\pi} f(x) dx = 2$.
- 5p b) Számítsa ki: $\int_0^{\pi} xf(x) dx$.

5p | c) Igazolja, hogy $\int_0^1 f(x) dx \geq \int_0^1 f^2(x) dx$.