

**Examenul național de bacalaureat 2021**

**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{\text{mate-info}}$**

**Testul 10**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- **Minden feladat megoldása kötelező. Hivatalból 10 pont jár.**
- **Effektív munkaidő 3 óra.**

**I. FELADATSOR**

**(30 pont)**

- 5p** 1. Számítsa ki a  $z = (2 + 3i)(2 - 3i) - (9 - 3i)$  komplex szám modulusát.
- 5p** 2. Adottak az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - 2$  és  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 5x + 20$  függvények.  
Számítsa ki  $(g \circ f)(2)$  értékét.
- 5p** 3. Oldja meg a valós számok halmazán a  $4^{x-5} = \frac{1}{16}$  egyenletet!
- 5p** 4. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy kiválasztva egy számot a háromjegyű természetes számok halmazából, a kiválasztott szám számjegyeinek szorzata 8 legyen!
- 5p** 5. Adott az  $ABCD$  paralelogramma, amelyben  $AB = 4$ ,  $BC = 6$  és az  $ABC$  szög mértéke  $120^\circ$ .  
Határozza meg az  $\overline{AM}$  vektor hosszát, ahol  $M$  a  $BD$  szakasz felezőpontja!
- 5p** 6. Adott az  $ABC$  háromszög, amelyben  $AB = 12$ ,  $AC = 16$  és  $BC = 20$ . Igazolja, hogy  $\frac{r}{R} = \frac{2}{5}$ , ahol  $r$  az  $ABC$  háromszögbe írt kör sugara és  $R$  a háromszög köré írt kör sugara!

**II. FELADATSOR**

**(30 pont)**

1. Adott az  $A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2a-1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  mátrix és az  $\begin{cases} ax + y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ (2a-1)x + 2y + z = a \end{cases}$  egyenletrendszer, ahol  $a$  egy valós szám.
- 5p** a) Igazolja, hogy  $\det(A(4)) = 5$ .
- 5p** b) Határozza meg az  $a$  valós szám azon értékét, amelyre az  $A(a)$  mátrix **nem** invertálható!
- 5p** c) Ha  $a = 3$ , határozza meg az egyenletrendszer  $(x_0, y_0, z_0)$  megoldásait, amelyre  $z_0^2 = x_0 + y_0$ .
2. A  $G = (1, +\infty)$  halmazon értelmezzük az  $x * y = \sqrt{x^{\log_3 y}}$  asszociatív műveletet.
- 5p** a) Igazolja, hogy  $4 * 3 = 2$ .
- 5p** b) Igazolja, hogy  $e = 9$  semleges elem az „ $*$ ” műveletre nézve!
- 5p** c) Határozza meg az  $x \in G$ , tudva azt, hogy egyenlő a szimmetrikusával a „ $*$ ” műveletre nézve!

**III. FELADATSOR**

**(30 pont)**

1. Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x^2 - 9)(x^2 - 4) + 3$  függvény!
- 5p** a) Igazolja, hogy  $f'(x) = 2x(2x^2 - 13), x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Igazolja, hogy  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x-3)}{f(x)-3} = \frac{1}{30}$ .
- 5p** c) Határozza meg az  $m$  valós szám értékét úgy, hogy az  $f(x) = m$  egyenletnek pontosan négy valós megoldása legyen!
2. Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x \arctg x$  függvény!

**5p** a) Igazolja, hogy  $\int_1^2 \frac{f(x)}{\operatorname{arctg} x} dx = 3$ .

**5p** b) Határozza meg az  $a$  nemnulla valós szám értékét úgy, hogy  $\int_0^{\sqrt{3}} f(x) dx = \frac{\pi}{a} - \sqrt{3}$ .

**5p** c) Igazolja, hogy  $\int_{-1}^1 x f(x) dx = 0$ .