

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică M_șt-nat

Testul 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

I. FELADATSOR

(30 punct)

- 5p** 1. Adottak a $z_1 = 1 - 2i$ és $z_2 = 1 + \frac{1}{2}i$ komplex számok, ahol $i^2 = -1$. Igazolja, hogy $z_1 + z_2 = z_1 z_2$.
- 5p** 2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + m$ függvény, ahol m valós szám. Határozza meg az m valós számot tudva, hogy $(f \circ f)(x) = 2f(x - 1)$, bármely x valós szám esetén!
- 5p** 3. Oldja meg a valós számok halmazán az $5^{x+1} \cdot 2^x = 50 \cdot 7^{x-1}$ egyenletet!
- 5p** 4. Hány olyan $f: \{0, 2, 4\} \rightarrow \{3, 5, 7, 9\}$ függvény van, amely teljesíti az $f(2) \leq 8$ feltételt?
- 5p** 5. Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben adottak az $A(-2, 4)$, $B(2, 0)$ és C pontok úgy, hogy $AC = BC$. Határozza meg a d egyenes egyenletét, amely áthalad a C ponton és merőleges az AB egyenesre!
- 5p** 6. Határozza meg az $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ értékét, ha $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \cos x = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \sin x + 1$.

II. FELADATSOR

(30 pont)

1. Adottak az $A(x) = \begin{pmatrix} 4^x & 0 \\ 0 & 9^x \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixok, ahol x valós szám.
- 5p** a) Igazolja, hogy $\det(A(x)) = 6^{2x}$, bármely x valós szám esetén!
- 5p** b) Határozza meg az x valós számot, amelyre teljesül az $A(x) \cdot B = B \cdot A(x)$ összefüggés!
- 5p** c) Igazolja, hogy bármely $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrixnak, amely teljesíti az $X \cdot X = A(1)$ feltételt, minden eleme egész szám!
2. A valós számok halmazán értelmezzük az $x \circ y = 2x^2 + xy + 2y^2$ műveletet!
- 5p** a) Igazolja, hogy $2 \circ 1 = 12$.
- 5p** b) Adottak az a , b és c valós számok úgy, hogy $2a + 2b + c \neq 0$. Tudva azt, hogy $c \circ a = c \circ b$, igazolja, hogy $a = b$.
- 5p** c) Határozza meg azokat az x valós számokat, amelyekre $x \circ (x + 1) = 5x^3 + 2$.

III. FELADATSOR

(30 pont)

1. Adott az $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln x + a(x + 1)$ függvény, ahol a valós szám.
- 5p** a) Igazolja, hogy $f'(x) = \ln x + 1 + a$, $x \in (0, +\infty)$, bármely a valós szám esetén!
- 5p** b) Ha $a = 1$, határozza meg az f függvény monotonitási intervallumait!
- 5p** c) Igazolja, hogy bármely a valós szám esetén, az f függvény konvex!
2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + e^x$ függvény.
- 5p** a) Mutassa ki, hogy $\int_{-1}^0 f(x) dx = -\frac{1}{e}$.
- 5p** b) Számítsa ki: $\int_0^1 x f(x^2) dx$.
- 5p** c) Minden nullától különböző n természetes szám esetén, tekintsük az $I_n = \int_0^2 x^n (f(x) - 2x) dx$ számot. Igazolja, hogy $I_{n+1} + (n+1)I_n = 2^{n+1}e^2$, bármely n nullától különböző természetes számra!