

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Testul 11

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

I. FELADATSOR

(30 punct)

- 5p 1. Igazolja, hogy $\sqrt[3]{(6-\sqrt{2})^3} + \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = 5$.
- 5p 2. Adottak az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 3$ és $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 2mx - 6$ függvények, ahol m egy valós szám. Határozza meg az m valós szám értékét tudva, hogy az f függvény grafikus képe metszi az Ox tengelyt egy olyan pontban, amelyben a g függvény grafikus képe is metszi az Ox tengelyt!
- 5p 3. Oldja meg a valós számok halmazán a $\log_2(x^2 - 4x + 12) = \log_3 27$ egyenletet!
- 5p 4. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy kiválasztva egy számot a kétegyű természetes számok halmazából, a kiválasztott szám számjegyeinek összege osztható legye 3-mal!
- 5p 5. Az xOy derékszögű koordináta rendszerben adottak az $A(-4,0)$, $B(-1,3)$ és $C(1,m)$ pontok, ahol m egy valós szám. Határozza meg az m valós szám értékét tudva, hogy az ABC háromszög derékszögű a B csúcsban!
- 5p 6. Igazolja, hogy $\sin \frac{25\pi}{6} + \cos \frac{23\pi}{3} = 1$.

II. FELADATSOR

(30 punct)

1. Adott az $A(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix}$ mátrix és az $\begin{cases} (1+a)x + y + z = 0 \\ x + (1+b)y + z = 0 \\ x + y + (1+c)z = 0 \end{cases}$ egyenletrendszer, ahol a , b és c nemnulla valós számok.
- 5p a) Igazolja, hogy $\det(A(-2,0,2)) = -4$.
- 5p b) Ha $abc + ab + ac + bc \neq 0$, akkor igazolja, hogy az $A(a,b,c)$ mátrix invertálható!
- 5p c) Tudva azt, hogy az egyenletrendszernek létezik a $(0,0,0)$ megoldástól különböző megoldása, igazolja, hogy az $N = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ egész szám!
2. A $G = (0,2)$ halmazon értelmezzük az $x * y = \frac{xy}{xy - x - y + 2}$ asszociatív műveletet és adott az $f: (0, +\infty) \rightarrow (0,2)$, $f(x) = \frac{2}{x+1}$ függvény.
- 5p a) Igazolja, hogy $1 * 1 = 1$.
- 5p b) Bizonyítsa be, hogy $f(x) * f(y) = f(xy)$, bármely $x, y \in (0, +\infty)$ esetén!
- 5p c) Határozza meg az n természetes számot, amelyre $f\left(\frac{1}{2}\right) * f\left(\frac{2}{3}\right) * f\left(\frac{3}{4}\right) * \dots * f\left(\frac{2020}{2021}\right) = \frac{2n}{n+1}$.

III. FELADATSOR

(30 punct)

1. Adott az $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x \ln x - x^2 + 3$ függvény.
- 5p a) Igazolja, hogy $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 0$.

- 5p** b) Igazolja, hogy az f függvény konvex a $(0,1)$ intervallumon!
- 5p** c) Bizonyítsa be, hogy $2 \ln x < x - \frac{1}{x}$, bármely $x \in (1, +\infty)$ esetén!
2. Minden n nemnulla természetes szám esetén értelmezzük az $I_n = n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$ számot.
- 5p** a) Igazolja, hogy $I_1 + \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = 1$.
- 5p** b) Igazolja, hogy $I_2 = 2 - \frac{\pi}{2}$.
- 5p** c) Bizonyítsa be, hogy $I_n \leq \ln 2$, bármely n nemnulla természetes szám esetén!