Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Testul 11

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

I. FELADATSOR (30 pont)

5p **1.** Határozza meg a $(b_n)_{n\geq 1}$ mértani haladvány negyedik tagját tudva, hogy $b_2 = 6$ és $b_3 = 3$.

5p **2.** Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+3x-4$ függvény. Határozza meg az a valós számokat, amelyekre $f(-a)+f(a)=0$.

5p **3.** Oldja meg a valós számok halmazán a $2^{x+1}=16\cdot 4^{-x}$ egyenletet!

5p **4.** Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy tetszőlegesen választva egy számot a kétjegyű természetes számok halmazából, abban az egyesek számjegye egyenlő legyen a tizesek számjegyének kétszeresével!

5p **5.** Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben adottak az $A(2,5)$, $B(4,-3)$ és $C(a,a+3)$ pontok, ahol a valós szám. Határozza meg azt az a valós számot, amelyre az OC egyenes áthalad az AB szakasz felezőpontján!

5p **6**. Igazolja, hogy $\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\cos^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos 2x$, bármely x valós szám esetén!

II. FELADATSOR (30 pont)

1. Adottak az $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ és $B(a,b)=\begin{pmatrix}1 & a\\ b & 1\end{pmatrix}$ mátrixok, ahol a és b valós számok.

5p **a)** Igazolja, hogy $\det(B(1,2))=-1$.

5p **b)** Igazolja, hogy $\det(A\cdot B(a,b))=0$, bármely a és b valós számok esetén.

5p **c)** Határozza meg az a és b valós számokat, amelyekre $A\cdot B(a,b)=B(a,b)\cdot A$.

2. Az $M=[1,+\infty)$ halmazon értelmezzük az $x\circ y=|x-y|+1$ műveletet.

5p **a)** Igazolja, hogy $3\circ 5=3$.

5p **b)** Számítsa ki $a-b$ értékét tudva, hogy $a=(2\circ 3)\circ 4$ és $b=2\circ(3\circ 4)$.

5p **c)** Bizonyítsa be, hogy végtelen sok olyan (m,n) nullától különböző természetes számpár létezik, melyre $m\circ n=m$.

III. FELADATSOR (30 pont)

1. Adott az $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\frac{x-1}{x+1}$ függvény.

5p **a)** Igazolja, hogy $f'(x)=\frac{2}{x^2-1}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Számítsa ki $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

5p **c)** Bizonyítsa be, hogy az f függvény **nem** szürjektív!

2. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$ függvény.

5p **a)** Igazolja, hogy $\int_0^1 2f(x)\,dx=3$.

5p **b)** Számítsa ki $\int_0^1 e^x f(x)\,dx$.

5p **c)** Igazolja, hogy $\int_0^e f\left(e^x\right)dx \leq \int_0^e e^{f(x)}dx$.