

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Testul 12

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Minden feladat megoldása kötelező. Hivatalból jár 10 pont.**
- **Munkaidő 3 óra.**

I. FELADATSOR

(30 pont)

- 5p** 1. Számítsa ki az $a = \frac{4}{\sqrt{2}}$ szám egészrészét!
- 5p** 2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + mx + 1$ függvény, ahol m valós szám. Határozza meg az m valós számokat, tudva azt, hogy az Ox tengely érintője az f függvény grafikus képének!
- 5p** 3. Oldja meg a valós számok halmazán a $\sqrt{(x-1)(x+2)} = (x+2)\sqrt{x-1}$ egyenletet!
- 5p** 4. Határozza meg az n , $n \geq 2$ természetes számot, tudva azt, hogy a $\{3, 4, 5, \dots, n+2\}$ halmaznak pontosan 55 kételemű részhalmaza van!
- 5p** 5. Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben adottak a d_1 és d_2 egyenesek, melyek egyenletei $2x - y + 1 = 0$, illetve $x + y + 2 = 0$. Határozza meg annak a d egyenesnek az egyenletét, amely merőleges a d_2 egyenesre és áthalad a d_1 és d_2 egyenesek metszéspontján!
- 5p** 6. Mutassa ki, hogy $\sin \frac{5\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

II. FELADATSOR

(30 pont)

1. Adott az $A(m, x) = \begin{pmatrix} 2 & -x & 1 \\ 1 & m & 3 \\ 3 & -2 & x \end{pmatrix}$ mátrix, ahol m és x valós számok.
- 5p** a) Mutassa ki, hogy $\det(A(4, 2)) = 0$.
- 5p** b) Határozza meg az $A(2, 1)$ mátrix rangját!
- 5p** c) Határozza meg az (n, p) nemnulla, különböző természetes számokból álló számpárokat, melyekre $\det(A(3, n)) = \det(A(3, p))$.
2. A valós számok halmazán értelmezett az $x * y = \frac{xy}{3} - x - y + 6$, asszociatív és semleges elemmel rendelkező művelet.
- 5p** a) Mutassa ki, hogy $(-1) * 3 = 3$.
- 5p** b) Igazolja, hogy $x * (y + z - 3) = (x * y) + (x * z) - 3$, bármely x , y és z valós számok esetén!
- 5p** c) Határozza meg az x , $x \neq 3$ valós számokat, melyekre $(x * (x + x' - 3)) + (x' * (2x - 3)) = 42$, ahol x' az x szimmetrikusa a „ $*$ ” műveletre nézve!

III. FELADATSOR

(30 pont)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 2} - ax$ függvény, ahol a egy valós szám.
- 5p** a) Az $a = 0$ esetén, mutassa ki, hogy $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Határozza meg az a valós számot, melyre az f függvény grafikus képének az $x = \sqrt{2}$ abszcisszájú pontjában húzott érintője párhuzamos az Ox tengellyel!

- 5p** c) Bizonyítsa be, hogy bármely a valós szám esetén, az f függvény grafikus képének van aszimptotája a $+\infty$ felé!
2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \arctg x$ függvény.
- 5p** a) Igazolja, hogy $\int_1^3 \frac{x f(x)}{\arctg x} dx = 20$.
- 5p** b) Mutassa ki, hogy $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{f(x)}{x} dx = \frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.
- 5p** c) Bizonyítsa be, hogy $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f^n(x) dx = 0$.