

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Testul 12

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

I. FELADATSOR

(30 punct)

- 5p** 1. Határozza meg a $(b_n)_{n \geq 1}$ mértani haladvány b_8 tagját, tudva, hogy $b_5 = 3$ és $b_6 = 6$.
- 5p** 2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - x - 3$ függvény. Igazolja, hogy $(f \circ f)(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$.
- 5p** 3. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet $2 \lg x = \lg(5x + 6)$.
- 5p** 4. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a háromjegyű természetes számok halmazából véletlenszerűen kiválasztott számban, a százask számjegye egyenlő legyen az egyesek számjegyével!
- 5p** 5. Az xOy derékszögű koordináta rendszerben adottak az $A(0,3)$, $B(-1,-2)$ és $C(a,-2)$ pontok, ahol a egy nemnulla valós szám, $a \neq -1$. Határozza meg az a valós szám azon értékét, amelyre az ABC háromszög magasságpontja (ortocentruma) az O pont!
- 5p** 6. Az ABC háromszögben $AB = 6$, $AC = 3\sqrt{6}$ és $B = \frac{\pi}{3}$. Számítsa ki a C szög mértékét!

II. FELADATSOR

(30 pont)

1. Adott az $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{pmatrix}$ mátrix, ahol a valós szám.
- 5p** a) Igazolja, hogy $\det(A(\sqrt{2})) = 3$.
- 5p** b) Igazolja, hogy az $A(a)$ mátrix invertálható, bármely a valós szám esetén!
- 5p** c) Határozza meg azt a k egész számot, amelyre teljesül az $A(1) \cdot A(1) \cdot A(1) \cdot A(1) \cdot A(1) = kA(1)$ összefüggés!
2. A valós számok halmazán értelmezzük az $x \circ y = 3xy - 2x - 2y + 2$ műveletet, amely asszociatív és létezik semleges eleme.
- 5p** a) Igazolja, hogy $\frac{1}{3} \circ \frac{1}{3}$ egész szám!
- 5p** b) Igazolja, hogy $x \circ x \geq \frac{2}{3}$, bármely x valós szám esetén!
- 5p** c) Határozza meg azt a x valós számot, amelyre $x \circ x \circ x = e$, ahol e a „ \circ ” művelet semleges elemét jelöli!

III. FELADATSOR

(30 pont)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$ függvény.
- 5p** a) Igazolja, hogy $f'(x) = \frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}, x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Igazolja, hogy az f függvény grafikonjának nem létezik aszimptotája $+\infty$ -ben!
- 5p** c) Bizonyítsd be, hogy $f\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right) < f\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$.
2. Adott az $f: 0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$ függvény.

5p a) Igazolja, hogy $\int_1^4 f^4(x) dx = 21$.

5p b) Számítsa ki $\int_0^1 f(e^x) dx$.

5p c) Igazolja, hogy $\int_1^4 e^{f(x)} dx = 2e^2$.