MATEMATIKA FELKÉSZÍTŐ AZ ORSZÁGOS FELMÉRŐRE

ALGEBRA

TERMÉSZETES SZÁMOK

1. Műveletek természetes számokkal

1. Ha egy műveletsor csak azonos rendű műveleteket tartalmaz, akkor azokat a leírás sorrendjében végezzük el.
2. Ha egy műveletsor különböző rendű műveleteket tartalmaz, akkor először a magasabb rendű műveleteket végezzük el: a hatványozást, utána a szorzást és osztást, majd az összeadást és kivonást.
3. Ha zárójelek is vannak, akkor először a kerek zárójelben levő, majd a szögletes, végül a kapcsos zárójelben levő műveleteket végezzük el.

Példák

1. $325 : 25 \cdot 5 = 13 \cdot 5 = 65$.
2. $5 \cdot 10 - 50 : 25 = 50 - 2 = 48$.
3. $3^3 + 4^2 \cdot 5 = 27 + 16 \cdot 5 = 27 + 80 = 107$.
4. $4 \cdot 5^2 - 2 \cdot 3^2 - 5 \cdot 2^3 = 4 \cdot 25 - 2 \cdot 9 - 5 \cdot 8 = 100 - 18 - 40 = 42$.
5. $20 - 20 : [20 - 20 : (20 - 2 \cdot 3^2)] = 20 - 20 : [20 - 20 : (20 - 18)] =$
   $= 20 - 20 : (20 - 20 : 2) = 20 - 20 : 10 = 20 - 2 = 18$.
6. $(2^2 \cdot 3^2 + 3^2 \cdot 7 + 1)^3 - 10^6 = (4 \cdot 9 + 9 \cdot 7 + 1)^3 - 1\,000\,000 =$
   $= (36 + 63 + 1)^3 - 1\,000\,000 = 100^3 - 100^3 = 0$.

Feladatok

1. Végezd el a kijelölt műveleteket!
   a) $200:25+45\cdot 2-27:3$; .... E: 89.
   b) $975:25:3+4\cdot 3\cdot 5+3^3$; .... E: 100.
   c) $(325:13\cdot 4-15\cdot 39:45):29$; .... E: 3.
   d) $180:9+140:7+100:5+60:3+20:1$; .... E: 100.
   e) $\left(1+2+2^2+2^3\right):15-40:\left(1+3+3^2+3^3\right)$; .... E: 0.
   f) $4^2-72:8+5^2\cdot 4-10^2$; .... E: 7.
   g) $\left[5\cdot\left(3^3-7\right)-2\cdot 5^2\right]:5^2-5^0$; .... E: 1.
   h) $(56-32:2^3):(58-3^2\cdot 5)$; .... E: 4.
2. Két szám összege 100. A két szám hányadosa 3, a maradék 16. Melyek ezek a számok? E: 79, 21.
3. Két szám különbsége 185. Határozd meg a két számot, ha tudod, hogy a két szám hányadosa 7, és a maradék 5. .... E: 215 és 30.
4. Egy háromjegyű természetes számot egyjegyű természetes számmal osztva, a hányados 17 és a maradék 8. Határozd meg a háromjegyű számot! .... E: $9 \cdot 17 + 8 = 161$.
5. Határozd meg azt a legnagyobb háromjegyű természetes számot, amelyet a legnagyobb kétjegyű természetes számmal osztva, a legnagyobb maradékot kapjuk! .... E: 989.
6. Melyek azok a természetes számok, amelyeknek a felbontott alakja:
   a) $7\cdot 10^4+4\cdot 10^3+3\cdot 10^2+5\cdot 10+4$; .... E: 74 354.
   b) $9\cdot 10^3+5\cdot 10+8$; .... E: 9 058.
   c) $9\cdot 10^6+6\cdot 10^3+1$. .... E: 9 006 001.
7. Melyik szám nagyobb az 5^2+12^2 és 13^2 közül? .... E: egyenlőek.
8. Írd fel a 35-öt olyan természetes számok szorzataként, amelyeknek az összege is 35.
   .... E: $35=5\cdot 7\cdot 1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1$ (23 darab 1-es)

2. Szöveges feladatok megoldási módszerei

a) *Az egységre visszavezetés módszere*

1. 7 labda 119 lejbe kerül. Mennyit kell fizetni 5 darab ugyanolyan labdáért?

Megoldás

7 labda .... 119 lej
5 labda .... ?
1 labda .... $119:7=17$ lej;
5 labda .... $17\cdot 5=85$ lej.

Feladatok

1. Egy diák 7 óra alatt 28 km utat tett meg. Mekkora utat tett meg a diák 4 óra alatt? .... E: 16 km.
2. Egy gépkocsi 100 km-en 5 liter benzint fogyaszt. Hány km-re elegendő 37 liter benzin? E:740 km.

b) *Az összehasonlítás módszere*

1. 3 kg narancs és 5 kg alma ára összesen 27 lej. 4 kg narancsért és 2 kg almáért összesen 22 lejt kell fizetni. Mennyibe kerül 1 kg narancs és 1 kg alma?

Megoldás

3 kg narancs + 5 kg alma .... 27 lej $\quad |\cdot 4$
4 kg narancs + 2 kg alma .... 22 lej $\quad |\cdot 3$
12 kg narancs + 20 kg alma .... $27\cdot 4=108$ lej
12 kg narancs + 6 kg alma .... $22\cdot 3=66$ lej
14 kg alma .... $108-66=42$ lej
1 kg alma ára $42:14=3$ lej, 1 kg narancs ára $(27-5\cdot 3):3=4$ lej.

Feladatok

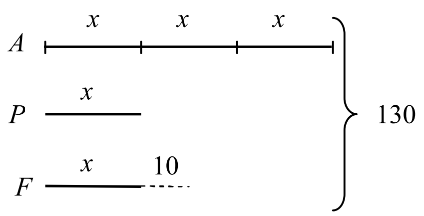
1. 3 kg alma és 5 kg körte 21 lejbe került. 6 kg alma és 2 kg körte ára 18 lej volt. Mennyibe került 1 kg alma és 1 kg körte külön-külön? .... E: 1 kg alma 2 lej és 1 kg körte 3 lej.
2. 3 golyóstoll és 10 ceruza 62 lejbe kerül. Mennyibe kerül egy ceruza és egy golyóstoll külön-külön, ha 7 ceruza árával egy golyóstollat lehet vásárolni? ...... E: 1 ceruza ára 2 lej, 1 golyóstollé 14 lej.

c) *Az ábrázolás módszere*

1. Andrásnak 3-szor több pénze van, mint Pistának, Pistának viszont 10 lejjel kevesebb pénze van, mint Ferinek. Összesen 130 lejük van. Hány leje van a gyerekeknek külön-külön?

Megoldás

Legyen x a Pista pénzét ábrázoló szakasz hossza.
Így Andrásnak $3x$, Ferinek pedig $x+10$ leje van.
Felírhatjuk, hogy:
$3x+x+x+10=130 \Leftrightarrow 5x+10=130 \quad |-10$
$5x=120 \quad |:5 \Leftrightarrow x=120:5=24$. *Felelet*: Pistának 24 leje, Ferinek $24+10=34$ leje, Andrásnak $24\cdot 3=72$ leje van.



Feladatok

1. Mikinek 4-szer több pénze van, mint Ferinek. Összesen 80 eurójuk van. Mennyi pénze van a két gyermeknek külön-külön? .... E: Mikinek 64 eurója, Ferinek 16 eurója van.
2. Két természetes szám összege 400, a különbségük 180. Melyek ezek a számok? ... E: 110 és 290.
3. Két természetes szám különbsége 360, az egyik 7-szerese a másiknak. Melyik ez a két szám? .... E: 420 és 60.
4. Három, egymást követő természetes szám összege 693. Melyik ez a három szám? E: 230,231,232.
5. Néhány egymás utáni természetes szám összege 30. Melyek ezek a számok? Hány megoldást kaptál? .... E: I: 9, 10, 11; II: 6, 7, 8, 9; III: 4, 5, 6, 7, 8.

d) <u>*A hamis feltevés módszere*</u>

Egy tömbházban kétszobás és háromszobás lakások vannak, összesen 20 lakás. Hány kétszobás és hány háromszobás lakás van a tömbházban, ha a lakásokban összesen 46 szoba van?

Megoldás

Feltételezzük, hogy minden lakás kétszobás. Így összesen $20 \cdot 2 = 40$ szoba lenne. Ez a szobák számánál 6-tal kevesebb. Ha egy kétszobás lakást háromszobásra cserélünk, akkor a szobák száma 1-gyel nő. Következik, hogy 6 darab 2-szobás lakás helyett 6 darab 3-szobás lakást kell venni. Így a tömbházban $20 - 6 = 14$ darab 2-szobás és 6 darab 3-szobás lakás van.

Feladatok

1. Egy udvarban tyúkok és nyulak vannak, összesen 25 fejük és 68 lábuk van. Hány tyúk és hány nyúl van az udvarban? .... E: 9 nyúl és 16 tyúk.
2. Egy színházelőadáson 400 jegyet adtak el: a felnőttek 15 lejes, a gyerekek pedig 8 lejes jegyet váltottak. A bevétel 5 160 lej volt. Hány felnőtt és hány gyerek nézte meg az előadást?

<u>*Megoldás*</u>: Ha mind a 400 résztvevő gyerek lett volna, akkor a bevétel $400 \cdot 8 = 3200$ lej lett volna. A különbség 1960 lej. Egy felnőttjegy 7 lejjel drágább, tehát 1960 : 7 = 280 felnőtt és 120 gyerek.

e) <u>*A fordított út módszere*</u>

Emese zsebpénzt kapott a szüleitől. Az első napon elköltötte a pénzének felét és még 10 lejt, a második napon pedig a megmaradt pénz felét és még 10 lejt. Így ezek után 4 leje maradt. Mennyi zsebpénzt kapott Emese a szüleitől?

Megoldás

Az eredeti számot úgy kapjuk meg, hogy hátulról visszafele számolunk. $4 + 10 = 14$, ez az első nap után megmaradt pénz fele. $14 \cdot 2 = 28$, ez az első nap után megmaradt pénz. $28 + 10 = 38$, ez az eredeti pénzösszeg fele. $38 \cdot 2 = 76$ lej, ennyi zsebpénzt kapott Emese.
Ezt műveletsorral is kiszámíthatjuk: $[(4+10) \cdot 2 + 10] \cdot 2 = (28+10) \cdot 2 = 76$.

Feladatok

1. Egy szám 3-szorosához hozzáadunk 9-et, az eredményt osztjuk 3-mal, a kapott hányadosból kivonunk 10-et, és eredményül 10-et kapunk. Határozd meg az eredeti számot! .... E: 17.
2. Egy vízilabda mérkőzés elején kevés néző volt. A második negyedre 3-szor annyi néző érkezett, mint amennyi az elején volt. A harmadik negyedre még jött 200 néző, de mivel a csapat vesztésre állt, a negyedik negyedet csak 600-an nézték végig, azaz feleannyian, mint a harmadikat. Hány néző volt a mérkőzés elején? .... E: 250.
3. Anikó, Kati, Laci és Feri testvérek. Kati 3-szor idősebb Anikónál, Laci 6 évvel idősebb Katinál, Feri pedig 2-szer kisebb Lacinál, azaz 18 éves. Határozd meg a négy testvér életkorát! ... E: 1, 3, 9.

KÖZÖNSÉGES TÖRTEK

<u>*1. Műveletek törtekkel*</u>

a) Összeadás

- $\frac{2}{5} + \frac{3}{20} + \frac{1}{8} = ?$ *Kövessük a közös nevezőre hozás lépéseit!* 1) $\ldots [5, 20, 8] = 80$.

  2) $\ldots 80 : 5 = 16$, $80 : 20 = 4$ és $80 : 8 = 10$. 3) $^{16)}\frac{2}{5} + {}^{4)}\frac{3}{20} + {}^{10)}\frac{1}{8} = \frac{32}{80} + \frac{12}{80} + \frac{10}{80} = \frac{54^{(2}}{80} = \frac{27}{40}$.

b) Kivonás

- $3\frac{4}{7} - 1\frac{5}{6} = {}^{6)}\frac{25}{7} - {}^{7)}\frac{11}{6} = \frac{150}{42} - \frac{77}{42} = \frac{73}{42} = 1\frac{31}{42}$;

c) Szorzás

1) $12 \cdot \frac{25}{36} = \frac{\overset{1}{\cancel{12}}}{1} \cdot \frac{25}{\underset{3}{\cancel{36}}} = \frac{25}{3} = 8\frac{1}{3}$; 2) $\frac{\overset{1}{\cancel{25}}}{\underset{7}{\cancel{49}}} \cdot \frac{\overset{5}{\cancel{35}}}{\underset{3}{\cancel{75}}} = \frac{1}{7} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{21}$; 3) $2\frac{1}{4} \cdot 3\frac{5}{9} = \frac{\overset{1}{\cancel{9}}}{\underset{1}{\cancel{4}}} \cdot \frac{\overset{8}{\cancel{32}}}{\underset{1}{\cancel{9}}} = 8$.

d) Osztás

1) $\frac{7}{12}:\frac{5}{8}=\frac{7}{{}_3\cancel{12}}\cdot\frac{\cancel{8}^{2}}{5}=\frac{14}{15}$; 2) $4\frac{1}{2}:4=\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{9}{8}$; 3) $9:2\frac{2}{3}=9:\frac{8}{3}=9\cdot\frac{3}{8}=\frac{27}{8}=3\frac{3}{8}$.

e) Hatványozás

1) $\left(\frac{3}{7}\right)^0=1$; 2) $\left(\frac{3}{5}\right)^4=\frac{81}{625}$; 3) $\left(2\frac{3}{4}\right)^2=\left(\frac{11}{4}\right)^2=\frac{121}{16}$; 4) $\left(\frac{2}{9}\right)^4\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^5=\left(\frac{2}{9}\right)^{4+5}=\left(\frac{2}{9}\right)^9$;

5) $\left(\frac{5}{8}\right)^{10}:\left(\frac{5}{8}\right)^5=\left(\frac{5}{8}\right)^{10-5}=\left(\frac{5}{8}\right)^5$; 6) $\left[\left(\frac{3}{7}\right)^2\right]^3=\left(\frac{3}{7}\right)^{2\cdot 3}=\left(\frac{3}{7}\right)^6$; 7) $\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{7}\right)^3=\left(\frac{2}{5}\right)^3\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^3$.

Feladatok

Végezd el a kijelölt műveleteket:

a) $\frac{1}{8}\cdot\left(4+2:\frac{1}{2}\right)$; .... E: 1.

b) $\frac{2}{5}\cdot\frac{15}{4}+\frac{7}{16}:\frac{14}{64}$; .... E: $3\frac{1}{2}$.

c) $\left(5-\frac{1}{8}\right):3\frac{1}{4}-\frac{1}{2}$; .... E: 1.

d) $\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(9+3:\frac{1}{3}\right)$; .... E: 2.

e) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}:2\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{6}$; .. E: 0.

f) $\left(\frac{2}{5}\right)^2:\left(\frac{3}{5}\right)^2-\frac{3}{8}\cdot\frac{24}{27}$. .... E: $\frac{1}{9}$.

2.Egy szám törtrésze, százalékok

1) Egy üzletben nyitáskor 120 bicikli volt. Aznap eladták a biciklik $\frac{5}{8}$-át. Hány biciklit adtak el?

Megoldás: A 120-at megszorozzuk $\frac{5}{8}$-dal: ${}^{15}\cancel{120}\cdot\frac{5}{\cancel{8}_1}=15\cdot 5=75$ biciklit adtak el.

2) Egy kiránduló megtett 6 km-t, amely az egész út $\frac{3}{5}$-e. Mekkora az egész út?

Megoldás: legyen x az egész út hossza. Most a szám törtrésze adott, és meg kell határozni a számot. Következik, hogy $x\cdot\frac{3}{5}=6 \Rightarrow x=6:\frac{3}{5}={}^{2}\cancel{6}\cdot\frac{5}{\cancel{3}_1}=10 \Rightarrow$ Az egész út hossza 10 km.

3) Egy munkás 1600 lejes fizetésének elköltötte a 75 %-át. Mennyi pénze maradt meg?

Megoldás: $16\cancel{00}\cdot\frac{75}{\cancel{100}}=16\cdot 75=1200$ lejt költött el, megmaradt 400 leje.

4) Pista egy út 60 %-át tette meg, éspedig 30 km-t. Hány km hosszú az egész út?

Megoldás: legyen x az egész út hossza. Ennek $\frac{60}{100}$-ad része 30 km. Felírhatjuk, hogy $x\cdot\frac{60}{100}=30 \Rightarrow$ $x=30:\frac{60}{100}={}^{1}\cancel{30}\cdot\frac{100}{\cancel{60}_2}=50$ km.

Feladatok

1. Egy 32-es létszámú osztály tanulóinak $\frac{3}{8}$-a fiú. Hány lány van az osztályban? .... E: 20.
2. Egy utas megtett 18 km-t, amely az egész út $\frac{2}{5}$-e. Mekkora az egész út? .... E: 45 km.
3. Pista elköltötte a pénzének 25%-át és még 250 lejt, így a pénzének a fele megmaradt. Mennyi pénze volt Pistának? .... E: 1000 lej.
4. Egy színházi előadáson 600 néző vett részt. A nézők 40%-a tanulókból, 60%-a felnőttekből állt. A felnőttek 12 lejes jegyet vásároltak, a tanulók 50%-os kedvezményt kaptak.
   a) Hány tanuló és hány felnőtt volt az előadáson? .... E: 240 tanuló és 340 felnőtt.
   b) Mennyi volt az előadás bevétele? .... E: 5760 lej.

TIZEDESTÖRTEK

1. Tizedestört átalakítása közönséges törtté / vegyes számmá

Véges tizedestörtet úgy alakítunk át közönséges törtté, hogy a számot tizedesvessző nélkül a számlálóba írjuk, a nevezőben pedig az 1-es után annyi 0-t írunk, ahány tizedesjegyünk van. A végén, ha lehet, egyszerűsítünk. Példa: $8,25=\frac{825^{(25}}{100}=\frac{33}{4}=8\frac{1}{4}$.

Tiszta szakaszos tizedestörtet úgy alakítunk át törtté vagy vegyes számmá, hogy leírjuk az egész részt, a számlálóba a szakaszt, a nevezőbe pedig annyi 9-est írunk ahány számjegyből a szakasz áll. Példa: $7,(36)=7\frac{36^{(9}}{99}=7\frac{4}{11}$.

Vegyes szakaszos tizedestörtet úgy alakítunk át törtté vagy vegyes számmá, hogy leírjuk az egész részt, a számlálóba a vessző utáni számot, ebből kivonjuk a vessző és szakasz közötti számot, a nevezőbe pedig annyi 9-est, ahány számjegyből a szakasz áll, utána pedig annyi nullát, ahány számjegy a vessző és szakasz között van. Példa: $4,3(45)=4\frac{345-3}{990}=4\frac{342^{(9}}{990}=4\frac{38^{\;(2}}{110}=4\frac{19}{55}$.

Megj. Tizedestörtet tizedestörttel úgy osztunk, hogy az osztás előtt az osztandóban és az osztóban a tizedesvesszőt annyi számjeggyel visszük jobbra, amennyivel az osztóból természetes számot kapunk. Példa: $74,12:2,5=741,2:25=29,648$. Az osztandót és osztót 10-zel szoroztuk, majd az előbbi módszerrel elvégeztük az osztást. $0,375:1,25=37,5:125=0,3$. Itt az osztás előtt 100-zal szoroztunk.

Feladatok

1. Alakítsd át a következő tizedestörteket közönséges törtekké: 0,3; 4,35; 7,25; 0,425; 0,(3); 0,(24); 2,(36); 0,(987); 1,4(3); 0,1(24); 1,1(12); 0,01(25).
2. Számítsd ki:
   a) 9 – (3,24 – 1,15) · 0,4; .... E: 8,164.
   b) 5 · (7,2 – 0,6 · 0,5) + 2,75; .... E: 37,25.
   c) 3,9 + (4,5 : 0,9 + 5 : 0,5) · 0,2; .. E: 6,9.
   d) 99 – ($0,9^2$ · 3 + $0,8^2$: $0,1^2$); .... E: 32,57.
   e) 4 · 23,5 – 3,5 : 0,7 + 1,1 : 0,1. .... E: 100.
   f) $\left(7,5+\frac{9}{4}+3,25\right):1,3$; .... E: 10.
   g) $\left(\frac{15}{100}+0,8\cdot 0,7\right):7,1$. .... E: 0,1.

2. Több pozitív racionális szám számtani és súlyozott számtani közepe

Több racionális szám számtani közepét úgy számítjuk ki, hogy a számok összegét elosztjuk az összeadandók számával.

Gyakorlat

Számítsuk ki a $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{12}$ és 0,4 számok számtani közepét!

$$m_a=\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{12}+0,4\right):3=\left({}^{15)}\frac{3}{4}+{}^{5)}\frac{5}{12}+{}^{6)}\frac{4}{10}\right):3=\left(\frac{45}{60}+\frac{25}{60}+\frac{24}{60}\right):3=\frac{\overset{47}{\cancel{94}}}{\underset{30}{\cancel{60}}}\cdot\frac{1}{3}=\frac{47}{90}.$$

Több racionális szám súlyozott számtani közepét úgy számítjuk ki, hogy a számokat megszorozzuk az adott súlyokkal, majd az így kapott számok összegét elosztjuk a súlyok összegével.

Gyakorló feladat

Mekkora Kati évi általánosa, ha 8 tantárgyból 10-esre, 3 tantárgyból 9-esre, 2 tantárgyból 8-asra és 1 tantárgyból 7-esre zárták le?

Megoldás: $m_s=\frac{10\cdot 8+9\cdot 3+8\cdot 2+7\cdot 1}{8+3+2+1}=\frac{80+27+16+7}{14}=\frac{130}{14}=9,28$.

1. Számítsd ki a következő számok számtani közepét!
   a) 3,2 és 4,8; .... E: 4.
   b) 6,25 és 4,15; .... E: 5,2.
   c) 2,9; 7,6 és 9,3; .... E: 6,6.
   d) 2,7; 1,5; 6; 8 és 0,4. .... E: 3,72.
2. Három szám számtani közepe 8,4. A második szám 2-szer nagyobb, mint az első, és 0,8-del nagyobb, mint a harmadik. Melyek ezek a számok? .... E: 5,2; 10,4 és 9,6.

ARÁNYOK ÉS ARÁNYPÁROK

1. Aránypárok, az aránypárok alaptulajdonsága, az ismeretlen tag kiszámítása

Két, egyenlőségjellel összekötött egyenlő arány aránypárt alkot. Példa: $\frac{6}{8}=\frac{9}{12}$. Általánosan: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, ahol $a,b,c,d\in\mathbb{Q}_+^*$. *Az aránypárok alaptulajdonsága: a kültagok szorzata egyenlő a beltagok szorzatával.* $a\cdot d=b\cdot c$. A fenti aránypár esetén: $6\cdot 12=8\cdot 9$.
Ha egy aránypár egyik tagja ismeretlen, akkor az kiszámítható.

Gyakorlatok

1) Számítsuk ki x értékét az $\frac{x}{4}=\frac{25}{5}$ aránypárból! Megoldás: $x=\frac{4\cdot \cancel{25}^{5}}{\cancel{5}_{1}}=20$.

2) Számítsuk ki x értékét a $\frac{4}{5}=\frac{8}{3x+1}$ aránypárból! Megoldás: $3x+1=\frac{5\cdot 8}{4}\Rightarrow 3x+1=10\Rightarrow x=3$.

Feladatok

1. Számítsd ki az x értékét a következő aránypárokból:
   a) $\frac{x}{25}=\frac{4}{10}$; .... E: 10.
   b) $\frac{8}{x}=\frac{4}{3}$; .... E: 6.
   c) $\frac{3}{20}=\frac{15}{x}$; .... E: 100.
   d) $\frac{x}{0,4}=\frac{0,25}{0,75}$. .... E: $\frac{2}{15}$.
2. Határozd meg az a és b pozitív racionális számokat, ha tudod, hogy:
   a) $a+b=200$ és $\frac{a}{b}=\frac{3}{7}$; .... E: 60; 140.
   b) $a+b=990$ és $\frac{a}{b}=\frac{2}{9}$; .... E: 180; 810.
   c) $a-b=540$ és $\frac{a}{b}=\frac{11}{5}$; .... E: 990; 450.
   d) $a^2+b^2=400$ és $\frac{a}{b}=\frac{3}{4}$. ...... E: 12; 16.

2. Egyenesen arányos mennyiségek, fordítottan arányos mennyiségek, egyszerű hármasszabály

Egyenesen arányos mennyiségek

Két mennyiség egyenesen arányos, ha az egyik valahányszoros növekedése (csökkenése) maga után vonja a másik ugyanannyiszoros növekedését. (csökkenését)

- Egy gépkocsi 60 km/h sebességgel haladva 2 óra alatt $2\cdot 60=120$ km-t, 6 óra alatt pedig $6\cdot 60=360$ km-t tesz meg. Állandó sebességgel haladva, az *idő* és a *megtett út egyenesen arányos mennyiségek.*

Egy szám felosztása adott számokkal egyenesen arányos részekre

- Három iskolába összesen 1620 darab almát szállítanak. Az elsőbe 120-, a másodikba 180-, a harmadikba pedig 240 tanuló jár. Hány almát kell szállítsanak az egyes iskoláknak?

Megoldás

Legyen x az első-, y a második-, z pedig a harmadik iskolába szállítandó almák száma. Az egyes iskoláknak vitt almák száma egyenesen arányos a tanulók számával. Tehát $\frac{x}{120}=\frac{y}{180}=\frac{z}{240}$ és $x+y+z=1620$. Az 1620-at fel kell osztani a 120, 180 és 240 számokkal egyenesen arányos részekre.
$\frac{x}{120}=\frac{y}{180}=\frac{z}{240}=k\Rightarrow x=120k$, $y=180k$ és $z=240k\Rightarrow 120k+180k+240k=1620\Rightarrow 540k=1620\Rightarrow k=3$. $x=120\cdot 3=360$, $y=180\cdot 3=540$ és $z=240\cdot 3=720$. Az első iskola 360-, a második 540-, a harmadik 720 db. almát kap.

Fordítottan arányos mennyiségek

Két mennyiség fordítottan arányos, ha az egyik valahányszoros növekedése maga után vonja a másik ugyanannyiszoros csökkenését.

- Egy gépkocsi egy távolságot 50 km/h sebességgel 4 óra alatt tesz meg. 100 km/h sebességgel 2 óra alatt tenné meg.

Tehát, egy adott távolság megtételéhez szükséges idő és a sebesség fordítottan arányos mennyiségek. A sebesség 2-szeres növekedése maga után vonja az idő 2-szeres csökkenését.

Felírhatjuk, hogy $50\cdot 4=100\cdot 2 \Rightarrow \frac{50}{100}=\frac{2}{4}$ vagy $\frac{50}{\frac{1}{4}}=\frac{100}{\frac{1}{2}}$.

Egy szám felosztása adott számokkal fordítottan arányos részekre

- Egy apa 110 szem cukorkát vásárolt 3 gyermekének, akik rendre 3-, 6-, illetve 9 évesek. A cukorkákat a gyerekek életkoraival fordítottan arányosan osztotta el. Hány szem cukorkát kaptak a gyerekek külön-külön?

Megoldás: legyen x a 3 éves, y a 6 éves, z pedig a 9 éves gyereknek adott cukorkák száma. Felírhatjuk, hogy $x+y+z=110$ és $\frac{x}{\frac{1}{3}}=\frac{y}{\frac{1}{6}}=\frac{z}{\frac{1}{9}}=k \Rightarrow x=\frac{1}{3}k$, $y=\frac{1}{6}k$ és $z=\frac{1}{9}k \Rightarrow \frac{1}{3}k+\frac{1}{6}k+\frac{1}{9}k=110 \Rightarrow$ $\frac{11}{18}k=110 \Rightarrow k=\frac{110\cdot 18}{11}=180 \Rightarrow x=\frac{1}{3}\cdot 180=60$, $y=\frac{1}{6}\cdot 180=30$, $z=\frac{1}{9}\cdot 180=20$. A 3 éves gyerek 60 darabot, a 6 éves 30 darabot, a 9 éves pedig 20 szem cukorkát kapott.

Egyszerű hármasszabály

- 3 kg alma 18 lejbe kerül. Mennyibe kerül 7 kg alma?

Megoldás. Az alma tömege és ára *egyenesen arányos* mennyiségek.

$$\begin{array}{l} 3\,kg \ldots\ldots\ldots\ldots 18\,lej \\ \underline{7\,kg \ldots\ldots\ldots\ldots \quad x} \end{array}$$

$$\frac{3}{7}=\frac{18}{x} \Rightarrow x=\frac{7\cdot \cancelto{6}{18}}{\cancelto{1}{3}}=42 \text{ lej.}$$

Egyenes arányosság esetén az ismeretlent úgy számítjuk ki, hogy az átló mentén levő számok szorzatát osztjuk a harmadik számmal.

- 4 vízcsap 12 óra alatt tölt meg egy medencét. Hány óra alatt töltené meg ugyanezt a medencét 6 vízcsap?

Megoldás. A vízcsapok száma és az idő fordítottan arányos mennyiségek.

$$\begin{array}{l} 4\,vízcsap \ldots\ldots\ldots\ldots 12\,óra \\ \underline{6\,vízcsap \ldots\ldots\ldots\ldots \quad x} \end{array}$$

$\frac{4}{6}=\frac{x}{12} \Rightarrow x=\frac{4\cdot 12}{6}=8$ óra alatt töltené meg a medencét.

Fordított arányosság esetén az ismeretlent úgy számítjuk ki, hogy a vízszintes mentén levő számok szorzatát osztjuk a harmadik számmal.

Feladatok

1. Határozd meg az a és b pozitív racionális számokat, ha tudod, hogy a számok egyenesen arányosak 3-mal és 5-tel, és 2 a + 3 b = 84. .... E: a = 12 és b = 20.
2. Határozd meg azokat az a, b és c pozitív racionális számokat, amelyek egyenesen arányosak a 3; 6 és 9 számokkal, valamint
   a) $a+b+c=270$; .... E: a = 45, b = 90 és c = 135.
   b) $ab+bc+ca=891$; .... E: a = 9, b = 18 és c = 27.
   c) $abc=1296$. .... E: a = 6, b = 12 és c = 18.
3. Határozd meg az a és b pozitív racionális számokat, ha tudod, hogy a számok fordítottan arányosak 2-vel és 5-tel, és 2 a + 5 b = 200. .... E: a = 50 és b = 20.

4. Határozd meg az a és b pozitív racionális számokat, ha tudod, hogy a számok fordítottan arányosak 3-mal és 8-cal, és $4\,a + 6\,b = 100$. .... E: $a = 16$ és $b = 6$.
5. Osszad fel a 3 600-at
   a) 2-vel, 3-mal és 5-tel egyenesen arányos részekre; .... E: 720; 1080; 1800.
   b) 4-gyel, 5-tel és 9-cel egyenesen arányos részekre; .... E: 800; 1000; 1800.
   c) 2-vel, 3-mal és 6-tal fordítottan arányos részekre; .... E: 1800; 1200; 600.
   d) 3-mal, 4-gyel és 6-tal fordítottan arányos részekre; .... E: 1600; 1200; 800.
6. 12 füzet 18 lejbe kerül. Mennyibe kerül 27 füzet? .... E: 40,5 lej.
7. 6 vízcsap 9 óra alatt tölt meg egy úszómedencét. Mennyi idő alatt töltené meg a medencét 4 vízcsap? .... E: 13,5 óra.
8. 8 munkás 20 nap alatt végezne el egy munkát. 5 nap múlva még jött 7 munkás. Hány nap alatt végezték el így a munkát? .... E: 5 + 8 = 13 nap.

EGÉSZ SZÁMOK

1. A műveletek egész számokkal

Alkalmazzuk a természetes számoknál tanultakat, de vigyázni kell az előjelekre.

1) $(-5)+(-3)^3-12:(-4)+(-8)\cdot(+2)=-5+(-27)+3+(-16)=$
$=-5-27+3-16=-48+3=-45$.

2) $(-375):(-5)^3\cdot(-9)-(-10)^7:(-10)^5-\left[(-2)^2\right]^3=$
$=(-375):(-125)\cdot(-9)-(-10)^2-(-2)^6=$
$=3\cdot(-9)-100-64=-27-164=-191$.

3) $\left\{\left[20:(-4)\right]^{12}:25^5-36\right\}\cdot(-4)^2-(-3^2)=\left(5^{12}:5^{10}-36\right)\cdot16+9=$
$=(25-36)\cdot16+9=-11\cdot16+9=-176+9=-167$.

Feladatok

Számítsd ki!

1. $(-2)+(-2)-(-2)\cdot(-2):(-2)$; .... E: – 2.
2. $(-4)\cdot(-9)+72:(-8)+(-3)^7:(-3)^4$; .... E: 0.
3. $2\cdot(-4)-3\cdot(-4)^2-4\cdot(-4)^3$; .... E: 200.
4. $3\cdot10^2-2^4\cdot5:(-3\cdot2^4+2^3)$; .... E: 302.
5. $-37\cdot[-10-10:(-2)]^2$; .... E: – 925.
6. $(-3)^4-\{(-3)^3-[(-3)^2-(-3)]\}$; .... E: 120.
7. $150:(-30)-20\cdot(-2)-(-10)^5:(-10)^4$; .... E: 45.

2. Egyenletek és egyenlőtlenségek az egész számok halmazán

Oldjuk meg a következő egyenletet az egész számok halmazán:

$-3\cdot(2x-6)=2\cdot(5-x)$

$-6x+18=10-2x$		Elvégeztük a szorzásokat.
$-6x+2x=10-18$		Rendeztük a tagokat.
$-4x=-8$	$\mid:(-4)$	Összevontunk.
$x=2$		Osztottunk.
$M=\{2\}$.		$2\in\mathbb{Z}\ \Rightarrow$ a 2 megoldás.

Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket a $\mathbb{Z}$ halmazon!

$4\cdot(2x-1)-5\geq3\cdot(4x-2)+9$
$8x-4-5\geq12x-6+9$
$8x-9\geq12x+3$
$-4x\geq12 \qquad \mid:(-4)$
$x\leq-3$ *Változott az egyenlőtlenség iránya!*
$M=\{\ldots-5,-4,-3\}$.

Feladatok

Oldd meg az egész számok halmazán:

1) $3\,x+8=-28$; .... E: – 12.
2) $5\cdot(x-2)-3=14-2\cdot(x+3)$; ...E: 3.
3) $-7\,x-28<35$; .... E: {– 9; – 8; ...}.
4) $|\,x\,|<2$. .... E: {– 1; 0; 1}.

A VALÓS SZÁMOK HALMAZA

1. Négyzetgyökvonás

Vonjunk négyzetgyököt néhány számból! Kövessük az eljárást!
1.) A számot hátulról kezdve kettős számcsoportokra osztjuk.
Megkeressük az első csoport lekerekített négyzetgyökét. Ez a 2, amit az eredményben a vízszintes vonal fölé írunk. $2^2 = 4$, $5-4=1$. Lehozzuk a következő számcsoportot, a 90-et. Vesszük a 2 kétszeresét, ez a 4. Ezt a 2 alá írjuk. Letakarjuk a 0-t, és megnézzük, hogy 19-ben a 4 hányszor van meg. $19:4=4$.
A 4-et leírjuk a 4 mellé, és szorzunk 4-gyel.
$44\cdot 4 = 176$. Ezt a 190 alá írjuk, és kivonjuk belőle.
Lehozzuk a 49-et, 24-nek vesszük a 2-szeresét, $24\cdot 2 = 48$, $144:48=3$, $483\cdot 3 = 1449$. A gyökvonás maradék nélküli.
Tehát, $\sqrt{59049} = 243$, azaz $243^2 = 59\,049$.

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{5'90'49} & \underline{243} \\ \underline{4} & \\ 190 & 44\cdot 4 \\ \underline{176} & \\ =14\,49 & 483\cdot 3 \\ \underline{14\,49} & \\ ==== & \end{array}$$

Törtből úgy vonunk négyzetgyököt, hogy a számlálóból és a nevezőből külön-külön gyököt vonunk.

$$\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5};\ \sqrt{\frac{1}{10\,000}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{100^2}} = \frac{1}{100};\ \sqrt{\frac{50^{(2}}{18}} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}.$$

Szorzatból úgy vonunk négyzetgyököt, hogy a szorzat minden tényezőjéből gyököt vonunk.

1) $\sqrt{36\cdot 49} = \sqrt{36}\cdot\sqrt{49} = 6\cdot 7 = 42$;

2) $\sqrt{72\cdot 50} = \sqrt{36\cdot 2\cdot 50} = \sqrt{36\cdot 100} = \sqrt{36}\cdot\sqrt{100} = 6\cdot 10 = 60$.

Hatvány négyzetgyökét a következőképpen számítjuk ki:

$$\sqrt{7^{28}} = \sqrt{\left(7^{14}\right)^2} = 7^{14};\ \sqrt{5^{13}} = \sqrt{5^{12}\cdot 5} = 5^6\cdot\sqrt{5}.$$

Feladatok

1. Számítsd ki:
   a) $\sqrt{2500}$, $\sqrt{11881}$, $\sqrt{3364}$, $\sqrt{6,25}$, $\sqrt{9,61}$, $\sqrt{20,25}$; .... E: 50; 109; 58; 2,5; 3,1; 4,5.
   b) $\sqrt{\frac{4}{9}}$, $\sqrt{\frac{16}{25}}$, $\sqrt{\frac{50}{98}}$, $\sqrt{\frac{27}{48}}$, $\sqrt{25\cdot 400}$, $\sqrt{81\cdot 64}$, $\sqrt{196\cdot 100}$; ...... E: $\frac{2}{9}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{3}{4}$, 100; 72; 140.

2. Számítási szabályok négyzetgyökökkel

Tényező kiemelése a gyökjel elé

1) $\sqrt{18} = \sqrt{9\cdot 2} = 3\sqrt{2}$;   2) $\sqrt{700} = \sqrt{100\cdot 7} = 10\sqrt{7}$;   3) $\sqrt{(-7)^2\cdot 2} = |-7|\cdot\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$.

Tényező bevitele a gyökjel alá

1) $2\sqrt{7} = \sqrt{2^2\cdot 7} = \sqrt{28}$;   2) $-7\sqrt{5} = -\sqrt{7^2\cdot 5} = -\sqrt{49\cdot 5} = -\sqrt{245}$.

Tört nevezőjének gyöktelenítése

1) $\overset{\sqrt{3})}{\frac{6}{\sqrt{3}}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3}^{(3} = 2\sqrt{3}$.   2) $\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{50}} = \frac{10\cancel{\sqrt{2}}}{5\cancel{\sqrt{2}}} = \frac{10}{5} = 2$.

Műveletek valós számokkal

1) $\underline{-3\sqrt{2}} + 4 \underline{-7\sqrt{2}} + 12 \underline{+2\sqrt{2}} + 3\sqrt{3} - 15 = -8\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + 1$.

2) $\left(-4\sqrt{2}\right)\cdot\left(-3\sqrt{8}\right) = +12\sqrt{16} = 12\cdot 4 = 48$.

3) $\left(-27\sqrt{24}\right):\left(+9\sqrt{2}\right) = -3\sqrt{12} = -3\cdot 2\sqrt{3} = -6\sqrt{3}$.

4) $(-36\sqrt{6} + 27\sqrt{15} - 9\sqrt{24}):(-3\sqrt{3}) = 12\sqrt{2} - 9\sqrt{5} + 6\sqrt{2} = 18\sqrt{2} - 9\sqrt{5}$.

5) $\left(-\frac{2}{3}\sqrt{5}\right)^2=\left(-\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\sqrt{5}\right)^2=\frac{4}{9}\cdot 5=\frac{20}{9}=2\frac{2}{9}$.

6) $\left(\sqrt{3}\right)^5\cdot\left(\sqrt{3}\right)^7=\left(\sqrt{3}\right)^{5+7}=\left(\sqrt{3}\right)^{12}=\left(\sqrt{9}\right)^6=3^6$.

7) $\left(\sqrt{2}\right)^8:\left(\sqrt{2}\right)^5=\left(\sqrt{2}\right)^{8-5}=\left(\sqrt{2}\right)^3$.

8) $\left[\left(\sqrt{5}\right)^3\right]^2=\left(\sqrt{5}\right)^{3\cdot 2}=\left(\sqrt{5}\right)^6=5^3=125$.

Feladatok

Számítsd ki:

1) $-7\sqrt{5}-\left(10\sqrt{2}-7\sqrt{5}\right)+10\sqrt{2}$; .... E: 0.
2) $\sqrt{32}-\sqrt{50}+\sqrt{18}$; .... E: $2\sqrt{2}$.
3) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}$; .... E: 6.
4) $-2\sqrt{3}\cdot\left(-3\sqrt{12}\right)$; .... E: 36.
5) $-12\sqrt{2}:\left(+3\sqrt{2}\right)$; .... E: – 4.
6) $\sqrt{48}:\left(-2\sqrt{3}\right)$; .... E: – 2.
7) $2\sqrt{3}-3\sqrt{8}:\left(-3\sqrt{2}\right)-\sqrt{12}$; .... E: 2.
8) $\left(-2\sqrt{2}\right)\cdot 8\sqrt{2}-16\sqrt{3}:\left(-4\sqrt{3}\right)$; .... E: – 28.
9) $\sqrt{20}+\sqrt{20}:\sqrt{20}-\sqrt{20}\cdot\sqrt{20}$; .... E: $2\sqrt{5}-19$.
10) $\sqrt{27}\cdot\sqrt{3}-\sqrt{18}:3+\left(3\sqrt{2}\right)^3:\left(-\sqrt{2}\right)$; .... E: $-45-\sqrt{2}$.
11) $16\sqrt{2}:\left(-2\sqrt{2}\right)^2-\left(3\sqrt{2}\right)^4:\left(3\sqrt{2}\right)^2+18$; .... E: $2\sqrt{2}$.
12) $2\sqrt{5}\cdot\left(\sqrt{5}-2\sqrt{20}\right)-3\sqrt{2}\cdot\left(2\sqrt{18}-3\sqrt{50}\right)$; .... E: 24.

3. Számtani és mértani közép

Számtani közép. Ha $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, akkor $m_a=\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$.

Két pozitív valós szám mértani közepe egyenlő a két szám szorzatának négyzetgyökével.

Ha $a, b\in\mathbb{R}_+$, akkor $m_g=\sqrt{a\cdot b}$. Ha $a, b\in\mathbb{R}_+$ és $a\le b$, akkor $a\le m_g\le m_a\le b$.

Gyakorlatok

1) Ha $a=18$ és $b=2$, akkor $m_a=\dfrac{18+2}{2}=10$ és $m_g=\sqrt{18\cdot 2}=\sqrt{36}=6$.

2) Ha $a=3\sqrt{2}$ és $b=9\sqrt{2}$, akkor $m_a=\dfrac{3\sqrt{2}+9\sqrt{2}}{2}=\dfrac{12\sqrt{2}}{2}=6\sqrt{2}$ és $m_g=\sqrt{3\sqrt{2}\cdot 9\sqrt{2}}=3\sqrt{6}$.

Feladatok

Számítsd ki a következő számok számtani és mértani közepét:

a) 5 és 20; .... E: 12,5; 10.
b) 6 és 24; .... E: 15; 12.
c) 2 és 8; .... E: 5; 4.
d) $2\sqrt{3}$ és $8\sqrt{3}$; .... E: $5\sqrt{3}$; $4\sqrt{3}$.
e) $4\sqrt{2}$ és $2\sqrt{2}$; .... E: $3\sqrt{2}$; 4.
f) $\sqrt{72}$ és $\sqrt{32}$; .... E: $5\sqrt{2}$; $4\sqrt{3}$.
g) $\sqrt{2}+1$ és $\sqrt{2}-1$.......... E: $\sqrt{2}$; 1.

ALGEBRAI SZÁMÍTÁSOK

1. Műveletek betűkkel jelölt valós számokkal

Összeadás és kivonás

1) $(-9a+25b-ab)+(-3ab-5a-25b)=\underline{-9a}+\cancel{25b}\underline{\underline{-ab-3ab}}\underline{-5a}-\cancel{25b}=-14a-4ab$.

2) $\left(-8a^2b+7ab^2\right)-\left(-3ab^2-7a^2b+2\right)=-8a^2b+7ab^2+3ab^2+7a^2b-\ -2=-a^2b+10ab^2-2$.

Szorzás

1) $-3x^2y\cdot(-6x^3y^4)=18x^5y^5$. (*azonos alapú hatványok szorzása*)

2) $(-7x+13y)\cdot(-2xy)=(-7x)(-2xy)+13y\cdot(-2xy)=14x^2y-26xy^2$.

3) $(3x-5y)(2y-6x)=6xy-18x^2-10y^2+30xy=36xy-18x^2-10y^2$.

Osztás

1) $-8x^5:(+4x^2)=\left[(-8):(+4)\right]\cdot\left(x^5:x^2\right)=-2x^3$.

2) $\left(6x^5-9x^4\right):\left(-3x^2\right)=\left(6x^5\right):\left(-3x^2\right)+\left(-9x^4\right):\left(-3x^2\right)=-2x^3+3x^2$.

Hatványozás

1) $\left(-3x^5\right)^3=\left(-3\right)^3\cdot\left(x^5\right)^3=-27x^{15}$.

2) $\left(-\dfrac{4}{7}x^2y^5\right)^2=\left(-\dfrac{4}{7}\right)^2\cdot\left(x^2y^5\right)^2=\dfrac{16}{49}x^4y^{10}$.

A műveletek elvégzésének sorrendje

1) $3x\cdot(5x-2)+4x\cdot(3-2x)-6x^3:(-2x)=15x^2-6x+12x-8x^2+3x^2=10x^2+6x$.

2) $-25x+(-3x)^2-(4x^3+8x^2):(-4x^2)-(2x)^4:(2x)^2=-25x+9x^2+x+2-4x^2=5x^2-24x+2$.

Feladatok

1. Bontsd fel a zárójeleket, majd vond össze az egynevű tagokat:
   a) $(3x-5y)+(-12x+y)$;
   b) $(8x-20y)-(5x-3y)$;
   c) $4x-\left[4x-\left(4x-2\right)\right]$;
   d) $3x-2-\left[4x-3-\left(5x-4\right)\right]$.

2. Végezd el a következő szorzásokat:
   a) $-6x\cdot(-2y)$;
   b) $7y\cdot(-5x)$;
   c) $-4x\cdot(5-3x)$;
   d) $(-12x+5y)\cdot(-2xy)$;
   e) $(3x+5y)(2x-3y)$;
   f) $\left(x^2+x+1\right)\left(x-1\right)$.

3. Végezd el a következő osztásokat, ahol $a,b,x,y\in\mathbb{R}^*$:
   a) $12x^3y^2:(-4xy^2)$;
   b) $-16a^4b^7:(-8b^3)$;
   c) $\left(8a^2-12a\right):\left(-4a\right)$;
   d) $\left(-9x^3y^2+6x^4y^3\right):\left(-3x^2y^2\right)$.

4. Számítsd ki:
   a) $4y\cdot(2-x)-3x\cdot(5-y)+xy$;
   b) $(x+2)(x+5)+(x-4)(x-3)$;
   c) $\left(6x^3-12x^2\right):\left(-3x^2\right)+\left(20x^3-35x^2+40x\right):\left(5x\right)$;
   d) $\left\{\left[\left(x-1\right)\cdot2-3x\right]\cdot3-4x\right\}\cdot\left(-1\right)$;
   e) $\dfrac{1}{3}\cdot\left(15x-21y\right)+\dfrac{1}{4}\cdot\left(12x-20y\right)+\dfrac{1}{2}\cdot\left(4y-8x\right)$.

2. Rövidített számítási képletek

I. Két szám összegének négyzete

Ha $a, b \in \mathbb{R}$, akkor $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

1) $\left(\underbrace{2x}_{a} + \underbrace{3y}_{b}\right)^2 = \left(\underbrace{2x}_{a}\right)^2 + 2\cdot\underbrace{2x}_{a}\cdot\underbrace{3y}_{b} + \left(\underbrace{3y}_{b}\right)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$.

2) $23^2 = (20+3)^2 = 20^2 + 2\cdot 20\cdot 3 + 3^2 = 400 + 120 + 9 = 529$. (*Így számolhatunk fejben!*)

II. Két szám különbségének négyzete

Ha $a, b \in \mathbb{R}$, akkor $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

1) $\left(\underbrace{5x}_{a} - \underbrace{7}_{b}\right)^2 = \left(\underbrace{5x}_{a}\right)^2 - 2\cdot\underbrace{5x}_{a}\cdot\underbrace{7}_{b} + \underbrace{7}_{b}^2 = 25x^2 - 70x + 49$.

2) $\left(\sqrt{2}x - \sqrt{3}y\right)^2 = \left(\sqrt{2}x\right)^2 - 2\sqrt{2}x\sqrt{3}y + \left(\sqrt{3}y\right)^2 = 2x^2 - 2\sqrt{6}xy + 3y^2$.

3) $19^2 = (20-1)^2 = 20^2 - 2\cdot 20\cdot 1 + 1^2 = 400 - 40 + 1 = 361$.

III. Két szám összegének és különbségének szorzata

Ha $a, b \in \mathbb{R}$, akkor $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

1) $\left(\underbrace{3x}_{a} + \underbrace{2y}_{b}\right)\left(\underbrace{3x}_{a} - \underbrace{2y}_{b}\right) = \left(\underbrace{3x}_{a}\right)^2 - \left(\underbrace{2y}_{b}\right)^2 = 9x^2 - 4y^2$.

2) $18\cdot 22 = (20-2)(20+2) = 20^2 - 2^2 = 400 - 4 = 396$.

IV. Három szám összegének négyzete

Ha $a, b, c \in \mathbb{R}$, akkor $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$.

1) $\left(\underbrace{2x}_{a} + \underbrace{3y}_{b} + \underbrace{c}_{}\right)^2 = \left(\underbrace{2x}_{a}\right)^2 + \left(\underbrace{3y}_{b}\right)^2 + \underbrace{1}_{c}^2 + 2\cdot\underbrace{2x}_{a}\cdot\underbrace{3y}_{b} + 2\cdot\underbrace{2x}_{a}\cdot\underbrace{1}_{c} + 2\cdot\underbrace{3y}_{b}\cdot\underbrace{1}_{c} =$

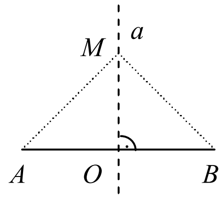
$= 4x^2 + 9y^2 + 1 + 12xy + 4x + 6y$.

Feladatok

1. Számítsd ki a képletek segítségével:
   - a) $(2x+3)^2$;
   - b) $(5a+2b)^2$;
   - c) $(2x-3)^2$;
   - d) $(6a-5b)^2$;
   - e) $(2x-3)(2x+3)$;
   - f) $(4a-3b)(4a+3b)$;
   - g) $\left(\frac{2}{5}a + \frac{5}{2}b\right)^2$;
   - h) $\left(\frac{2}{3}x - \frac{3}{2}a\right)^2$;
   - i) $\left(4x - \frac{1}{2}\right)\left(4x + \frac{1}{2}\right)$;
   - j) $\left(0,25x + 0,75\right)^2$;
   - k) $\left(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}\right)^2$;
   - l) $\left(2x + 3y + 5z\right)^2$;
   - m) $\left(9x - 2y - 3z\right)^2$.
2. Adott az $E(x) = x^2 + 6x + 9$ algebrai kifejezés, ahol *x* valós szám.
   - a) Számítsd ki az $E(0)$, $E(-3)$, $E(1)$ és $E(3)$ értékeket!
   - b) Melyik *x* értékre lesz a kifejezés értéke minimális, és miért?
   - c) Oldd meg az $E(x) = 0$ egyenletet, ahol $x \in \mathbb{R}$!
3. Adottak az $A = 2^2 + 4^2 + ... + 2020^2$ és $B = 1^2 + 3^2 + ... + 2019^2$ számok. $A - B = ?$
4. Igazold, hogy az $E(x) = (2x-3)^2 + 2(2x-3)(1-2x) + (1-2x)$, $x \in \mathbb{R}$ kifejezés értéke állandó, azaz nem függ *x* értékétől!
5. Számítsd ki az $E(x) = |x-3| + |x-5|$ kifejezés értékét, ha $x \in (3;5)$.

MÉRTAN

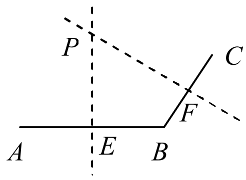
1. SZAKASZ FELEZŐMERŐLEGESE



– Egy szakasz felezőmerőlegese egy olyan egyenes, amely merőleges a szakaszra, és átmegy a szakasz felezőpontján. ($[AB]$ felezőmerőlegese az a)
<u>Tulajdonság</u>: a felezőmerőleges bármely pontja egyenlő távolságra van a szakasz végpontjaitól. (és fordítva) .... $M \in a \Leftrightarrow [MA] \equiv [MB]$.

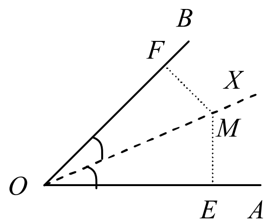
Feladatok

1. Az A, B, C és D kollineáris pontok ebben a sorrendben úgy, hogy $[AC] \equiv [BD]$. Igazold, hogy az AD és BC szakaszok felezőmerőlegesei egybeesnek! (a felezőpontjaik egybeesnek .....)
2. Az ábrán látható AB és BC szakaszok felezőmerőlegesei a P pontban metszik egymást. Igazold, hogy:
   a) a $PAC_{\triangle}$ egyenlő szárú; ($[PA] \equiv [PB] \equiv [PC]$ ....)
   b) $m(\widehat{APC}) = 2 \cdot m(\widehat{EPF})$! ....(PE az APB szög szögfelezője ...)



2. SZÖGEK

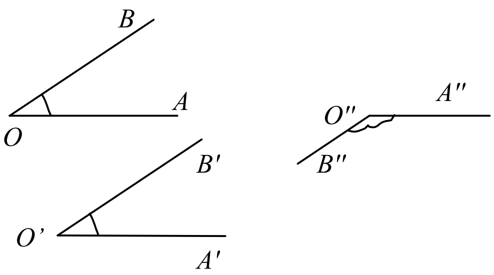
a) <u>*Egy szög szögfelezője*</u>
– A szög csúcsából kiinduló olyan félegyenes, amely a szög száraival kongruens szögeket alkot.
<u>Tulajdonság</u>: a szögfelező bármely pontja egyenlő távolságra van a szög száraitól. (és fordítva) .... $M \in (OX \Leftrightarrow [ME] \equiv [MF]$.



b) <u>*Pótszögek*</u>: két olyan szög, amelyek mértékeinek összege 90°.
c) <u>*Kiegészítő szögek*</u>: két olyan szög, amelyek mértékeinek összege 180°.
d) <u>*Párhuzamos szárú szögek:*</u>
– Két olyan szög, amelyeknek szárai párhuzamosak egymással.

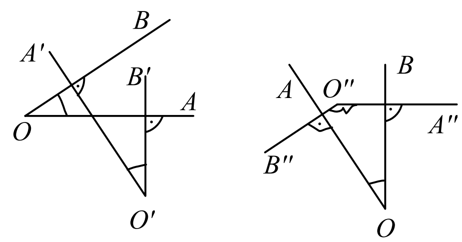
<u>*Tulajdonság:*</u>
– A párhuzamos szárú szögek kongruensek, vagy kiegészítő szögek.

- $\widehat{AOB} \equiv \widehat{A'O'B'}$;
- $m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{A''O''B''}) = 180°$.

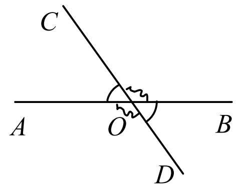


e) <u>*Merőleges szárú szögek*</u>
– Két olyan szög, amelyeknek a szárai merőlegesek egymásra.
<u>*Tulajdonság:*</u>
– A merőleges szárú szögek kongruensek, vagy kiegészítő szögek.

- $\widehat{AOB} \equiv \widehat{A'O'B'}$;
- $m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{A''O''B''}) = 180°$.

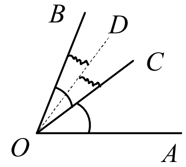


f) <u>*Csúcsszögek*</u>
Két olyan szöget, amelyeknek csúcsuk közös és a száraik egymás meghosszabbításába esnek, csúcsszögeknek nevezünk.
$\widehat{AOC} \equiv \widehat{BOD}$, mert minkét szögnek ugyanaz a kiegészítő szöge, a $\widehat{COB}$. Ebből egy fontos tulajdonság következik.
A csúcsszögek kongruensek egymással.
Az ábrán más csúcsszögpárt is látunk: $\widehat{COB}$ és $\widehat{AOD} \Rightarrow \widehat{COB} \equiv \widehat{AOD}$.



Feladatok

1. Az ábrán (*OC* az $\widehat{AOB}$, (*OD* pedig a $\widehat{BOC}$ szögfelezője. Számítsd ki a *DOC* szög mértékét, ha:



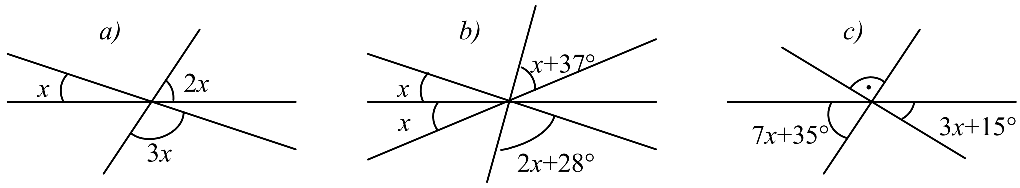
   a) $m(\widehat{AOB}) = 84°$; .... E: $21°$.

   b) $m(\widehat{BOC}) = 68°$; .... E: $34°$.

   c) $m(\widehat{AOD}) = 150°$ . ... E: $50°$.

2. Az $\widehat{AOB}$ és $\widehat{BOC}$ egymás melletti szögek. Számítsd ki a két szög szögfelezője által közrezárt szög mértékét, ha:

   a) $m(\widehat{AOB}) = 48°$ és $m(\widehat{BOC}) = 68°$; b) $m(\widehat{AOB}) = 50°$ és $m(\widehat{AOC}) = 100°$.
3. Négy egymás melletti szög együtt egyenesszöget alkot. Mindegyik szög mértéke az előzőnél 10°-kal nagyobb. Számítsd ki a szögek mértékét! .... E: $30°, 40°, 50°, 60°$.
4. Határozd meg két egyenes metszésekor keletkezett szögek mértékét, ha az egyik szög mértéke a) 30°; b) 42°; c) 75°. Nevezd meg a keletkezett csúcsszögpárokat!
5. Számítsd ki az *x* értékét a következő ábrák esetén!

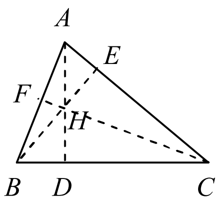


6. Számítsd ki a következő szögek pótszögét: $47°$, $53°42'$, $75°$, $12°25'$, $72°48'$.
7. Számítsd ki a következő szögek kiegészítő szögét: $125°$, $49°$, $115°20'$, $12°25'$.

3. HÁROMSZÖGEK

1. Nevezetes vonalak

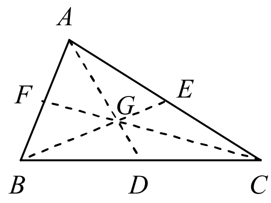
a) *magasságok*: *AD*, *BE* és *CF*.



$AD \perp BC$, $BE \perp AC$ és $CF \perp AB$.

H – magasságpont. (*ortocentrum*)

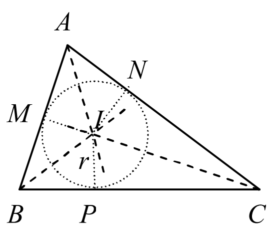
b) *oldalfelezők*: *AD*, *BE* és *CF*.



$[AF] \equiv [FB]$, $[BD] \equiv [DC]$ és $[CE] \equiv [EA]$.

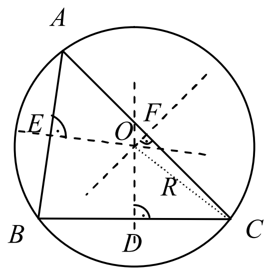
G – súlypont, $AG = 2\ GD$, $GD = \frac{1}{3} AD$.

c) *szögfelezők*: (*AI*, (*BI* és (*CI*.

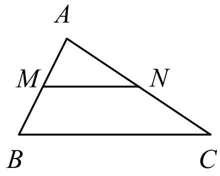


– *I* – a szögfelezők metszéspontja, azaz a háromszögbe írt kör középpontja.
– $IP = r$ – a háromszögbe írt kör sugara.
– *M*, *N*, *P* – érintési pontok.

d) *oldalfelező merőlegesek*: *OD*, *OE* és *OF*.



O – az oldalfelező merőlegesek metszéspontja.
O – az $ABC\triangle$ köré írt kör középpontja.
R – a háromszög köré írt kör sugara.

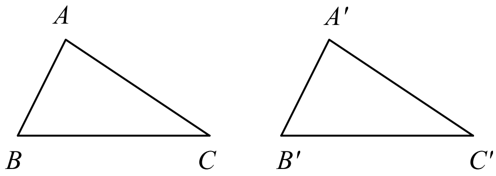


2. A háromszög középvonala

– $[MN]$ – az ABC háromszög középvonala.
– $[AM]\equiv[MB]$ és $[AN]\equiv[NC]$.

Tulajdonságok: $MN \parallel BC$ és $MN=\dfrac{BC}{2}$.

3. Kongruencia-esetek



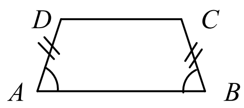
$ABC_{\triangle}\equiv A'B'C'$, ha:

I. e: $[AB]\equiv[A'B']$, $[BC]\equiv[B'C']$ és $\widehat{B}\equiv\widehat{B'}$. (*o.sz.o.*)

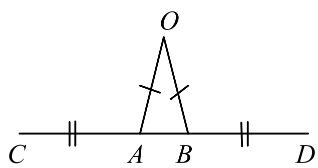
II. e: $[BC]\equiv[B'C']$, $\widehat{B}\equiv\widehat{B'}$ és $\widehat{C}\equiv\widehat{C'}$. (*sz. o. sz.*)

III. e: $[AB]\equiv[A'B']$, $[BC]\equiv[B'C']$ és $[AC]\equiv[A'C']$. (*o. o. o.*)

Feladatok

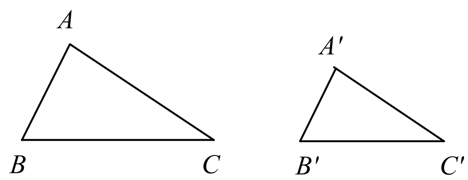


1. Az ábrán $[AD]\equiv[BC]$ és $\widehat{A}\equiv\widehat{B}$. Bizonyítsd be, hogy:
   a) $[AC]\equiv[BD]$; .... M: $DAB_{\triangle}\equiv CBA_{\triangle}$ ....
   b) $\widehat{ADB}\equiv\widehat{ACB}$! ...M: kongruens háromszögek megfelelő szögei.



2. Az ábrán $[CA]\equiv[BD]$ és $[OA]\equiv[OB]$. Igazold, hogy:
   a) az $OCD_{\triangle}$ egyenlő szárú;
   b) $\widehat{COB}\equiv\widehat{DOA}$.
   M: $AOC_{\triangle}\equiv BOD_{\triangle}$ ....
3. Az A-ban derékszögű $ABC_{\triangle}$-ben vedd fel a $(BD$ szögfelezőt, $D\in(AC)$ és a $DE\perp BC$ egyenest, $E\in(BC)$. Bizonyítsd be, hogy:
   a) $[AD]\equiv[DE]$;...... M: $\equiv$ háromszögek... b) BD az $[AE]$ felezőmerőlegese.
4. Az ABC egyenlő szárú háromszögben $[AB]\equiv[AC]$, $(AD$ szögfelező és $D\in[BC]$. Igazold, hogy $(AD$ az $ABC_{\triangle}$-ben magasság is, és oldalfelező is!
5. Egy háromszög oldalainak hossza rendre 18 cm, 24 cm és 10 cm. Számítsd ki a háromszög középvonalainak hosszát!
6. Egy egyenlő oldalú háromszög egyik középvonalának hossza 10 cm. Mekkora a háromszög kerülete?

4. Hasonlósági esetek



$ABC_{\triangle}\sim A'B'C'_{\triangle}$, ha:

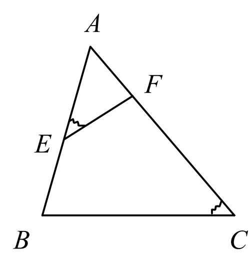
I. eset: $\widehat{A}\equiv\widehat{A'}$ és $\widehat{B}\equiv\widehat{B'}$. (2-2 szögük kongruens)

II. eset: $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}$ és $\widehat{B}\equiv\widehat{B'}$. (2-2 oldaluk arányos és a közrezárt szögük kongruens)

III. eset: $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{AC}{A'C'}$. (az oldalaik páronként arányosak)

Feladatok

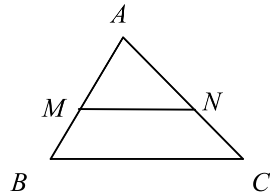
1. Az $ABC_{\triangle}$ oldalainak hossza 10 cm, 18 cm és 16 cm, az $MNP_{\triangle}$ oldalainak hossza pedig 27 cm, 15 cm és 24 cm. Igazold, hogy a két háromszög hasonló!



2. Az ábrán látható $ABC_{\triangle}$-ben $E\in(AB)$ és $F\in(AC)$ úgy, hogy $\widehat{AEF}\equiv\widehat{ACB}$. Tudjuk, hogy $AE=6$ cm, $AF=4$ cm, $EF=3$ cm és $AB=12$ cm.
   a) Igazold, hogy $AEF_{\triangle}\sim ACB_{\triangle}$!
   b) Számítsd ki az $ABC_{\triangle}$ kerületét!

M: A 2. hasonlósági eset alapján................

5. Thalész tétele



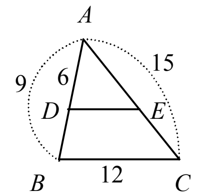
A háromszög egyik oldalával húzott párhuzamos egyenes, a másik két oldalt arányos részekre osztja. Ha $MN \parallel BC \Rightarrow \dfrac{AM}{MB} = \dfrac{AN}{NC}$ vagy $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$.

Fordított tétel: Ha $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{AN}{NC} \Rightarrow MN \parallel BC$.

6. A hasonlóság alaptétele:

Az előző ábra jelöléseivel: ha $MN \parallel BC \Rightarrow \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$.

Alkalmazás

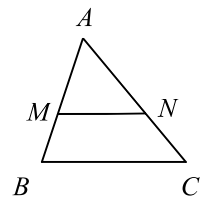


Az ábrán látható ABC_Δ-ben $DE \parallel BC$, $AD = 6$ cm, $AB = 9$ cm, $BC = 12$ cm és $AC = 15$ cm. Számítsuk ki az *AE, EC, DB* és *DE* szakaszok hosszát!

Meg: Thalész tétele alapján $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC} \Rightarrow \dfrac{6}{9} = \dfrac{AE}{15} \Rightarrow AE = 10$ cm, $EC = 5$ cm.

A hasonlóság alaptétele szerint: $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{DE}{BC} \Rightarrow \dfrac{6}{9} = \dfrac{DE}{12} \Rightarrow DE = 8$ cm.

Feladatok



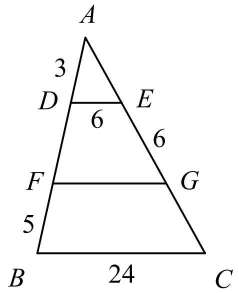
1. Az ábrán látható ABC_Δ-ben $M \in (AB)$ és $N \in (AC)$ úgy, hogy $MN \parallel BC$. Egészítsd ki a következő táblázatot! (*A szakaszok hosszai méterben vannak kifejezve*)

	AB	*AC*	*BC*	*AM*	*AN*	*MN*	*MB*	*NC*
a			13,5	6	8	9		
b					3	6	8	6
c			21			7	6	16
d	12			4		6		16

2. Az *ABCD* trapézban $AB \parallel CD$ és $AC \cap BD = \{O\}$. Számítsd ki az *AO*, *OC*, *BO* és *OD* szakaszok hosszát, ha:

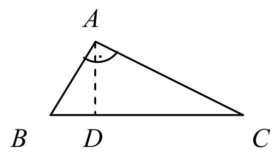
   a) $AC = 21$ dm, $BD = 35$ dm és $\dfrac{CO}{OA} = \dfrac{2}{5}$; b) $AC = 32$ cm, $BD = 40$ cm és $\dfrac{AO}{AC} = \dfrac{5}{8}$.

3. Bizonyítsd be, hogy egy paralelogramma átlóinak metszéspontja rajta van két szemközti oldal felezőpontját összekötő egyenesen!



4. Igazold, hogy egy téglalap oldalainak felezőpontjai egy rombusz csúcspontjai!
5. Igazold, hogy egy konvex négyszög oldalainak felezőpontjai egy paralelogramma csúcspontjai!
6. Az ábrán látható ABC_Δ-ben $D \in (AB)$, $F \in (DB)$ és $E, G \in (AC)$ úgy hogy, $DE \parallel FG \parallel BC$. Tudjuk, hogy $AD = 3$ cm, $FB = 5$ cm, $EG = DE = 6$ cm és $BC = 24$ cm. Számítsd ki az *FG*, *DF*, *AE* és *GC* szakaszok hosszát! .... E: $DF = 4$, $AE = 4{,}5$, $FG = 14$, $GC = 7{,}5$.

7. Metrikus összefüggések a derékszögű háromszögben



Ha az ABC_Δ *A*-ban derékszögű, akkor igazak a következő kijelentések:

a) A magasság tétele: $AD^2 = BD \cdot DC$.

b) A befogó tétele: $AB^2 = BD \cdot BC$ és $AC^2 = DC \cdot BC$.

c) Pitagorasz tétele: $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Fontos megjegyezni, hogy a fordított tételek is igazak.

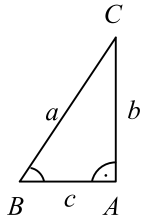
Röviden: ha az ABC_Δ-ben a fenti egyenlőségek közül valamelyik fennáll, akkor a háromszög *A*-ban derékszögű.

8. Szögfüggvények

Ha az $ABC\triangle$-ben $m(\widehat{BAC})=90°$, akkor :

$\sin\widehat{B}=\dfrac{b}{a}$; $\cos\widehat{B}=\dfrac{c}{a}$;

$tg\,\widehat{B}=\dfrac{b}{c}$; $ctg\,\widehat{B}=\dfrac{c}{b}$.



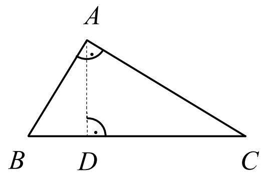
A $30°$, $45°$ és $60°$ esetén a szögfüggvények értékei a mellékelt táblázatban láthatók. (*ajánlatos megjegyezni*)

	$30°$	$45°$	$60°$
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
ctg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

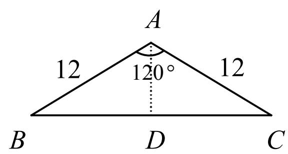
Feladatok

1. Az $ABC\triangle$-ben $m(\widehat{A})=90°$, $AD\perp BC$, $D\in BC$. Egészítsd ki a következő táblázatot!

	AB	AC	BC	AD	BD	DC
a	60	80				
b		20		12		
c	30			24		
d		20	29			



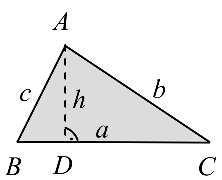
2. Egy derékszögű háromszögben a befogók átfogóra eső vetületeinek hosszai 4 cm és 1 cm. Mekkora az átfogóhoz tartozó magasság hossza? .... E: 2 cm.
3. Az 1. feladat ábráján az $ABC\triangle$ A-ban derékszögű, $m(\widehat{C})=30°$, $AD\perp BC$, ahol $D\in BC$ és $AB=6$ cm. Számítsd ki:
   a) a BD és DC szakaszok hosszát; (3;9)
   b) a háromszög oldalainak hosszát;
   c) az AD magasság hosszát; .... ($3\sqrt{3}$)
   d) a háromszög területét!
4. Egy egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogójának hossza 12 cm. Számítsd ki az átfogóhoz tartozó magasság és a befogók hosszát! .... E: $h=6$ cm és $b=6\sqrt{2}$ cm.
5. Az $ABCD$ derékszögű trapézban $AB\parallel DC$, $m(\widehat{A})=90°$, $AC\perp BC$, $AB=6\sqrt{2}$ cm és $DC=2\sqrt{2}$ cm. Számítsd ki a trapéz kerületét és területét! .... E: $h=4$ cm, $T=16\sqrt{2}$ cm^2.
6. Egy egyenlő szárú derékszögű háromszögnek az átfogója 12 cm. Mekkora a befogója?
7. Számítsd ki a 10 m oldalú egyenlő oldalú háromszög magasságának hosszát és a területét!
8. Az $ABCD$ egyenlő szárú trapézban $AB\parallel DC$, $AB=22$ cm, $AD=DC=CB=10$ cm. Számítsd ki:
   a) a trapéz magasságának és átlóinak hosszát; .... $h=8$ cm, $AC=8\sqrt{5}$ cm.
   b) a trapéz területét. .... $T=128$ cm^2.
9. Az ábrán látható $ABC\triangle$-ben $m(\widehat{BAC})=120°$, $AB=AC=12$ cm és $AD\perp BC$, ahol $D\in BC$. Számítsd ki:
   a) az AD magasság és BC alap hosszát; .... $h=6$, $BC=12\sqrt{3}$ cm.
   b) az $ABC\triangle$ területét! .... $36\sqrt{3}$ cm^2.



10. Az $ABC\triangle$-ben $AB=AC=12$ cm és $BC=12\sqrt{3}$ cm. Számítsd ki a háromszög szögeinek mértékét és a háromszög területét! .... E: $120°, 30°, 30°$ és $36\sqrt{3}$ cm^2.

4. TERÜLETEK

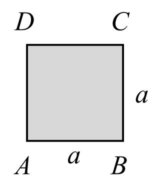
1) *háromszög:*



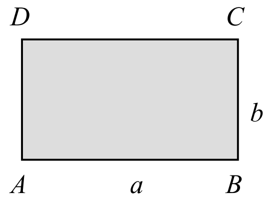
$$T=\frac{BC\cdot AD}{2}=\frac{a\cdot h}{2}=\frac{AB\cdot BC\cdot\sin\widehat{B}}{2}.$$

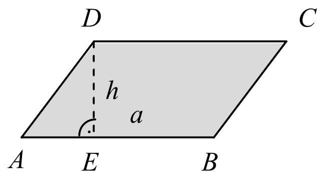
Ha $m(\widehat{BAC})=90° \Rightarrow AD=\dfrac{AB\cdot AC}{BC}$, $h=\dfrac{b\cdot c}{a}$.

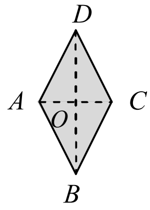
2) *négyzet:* $T=a^2$.



3) *téglalap.* 4) *paralelogramma* 5) *rombusz*



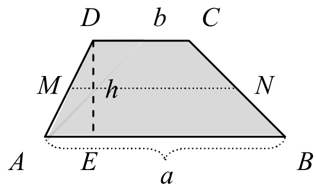




$T = a \cdot b$. $T = AB \cdot DE = a \cdot h = AB \cdot AD \cdot \sin(\widehat{BAD})$. $T = \dfrac{AC \cdot BD}{2}$.

6) *trapéz*:

$$T = \frac{(AB + CD) \cdot DE}{2} = \frac{(a+b) \cdot h}{2}.$$



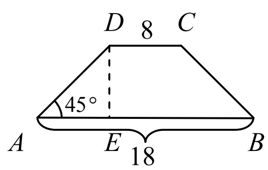
Ha $[DM] \equiv [MA]$ és $[CN] \equiv [NB]$, akkor $[MN]$ *középvonal*

$$\Rightarrow MN = \frac{a+b}{2} \text{ és } MN \parallel AB.$$

7) *kör*: $T = \pi \cdot R^2$ és $K = 2 \cdot \pi \cdot R$, ahol R a kör sugara.

Feladatok

1. Egy négyzet oldalának hossza 4 cm. Mekkora a területe?
2. Egy négyzet kerülete 24 cm. Mekkora a területe?
3. Egy négyzet területe 81 cm^2. Határozd meg az oldalának hosszát!
4. Egy téglalap hosszúsága 7 cm, a szélessége 3 cm. Mekkora a téglalap kerülete és területe?
5. Egy téglalap kerülete 48 cm, a hosszúsága pedig 3-szorosa a szélességének. Számítsd ki a téglalap méreteit és a területét!
6. Egy téglalap hosszúsága 9 cm, a szélessége pedig 4 cm.
   a) Számítsd ki a téglalap területét!
   b) Mekkora annak a négyzetnek az oldalhossza, amelynek a területe egyenlő a téglalap területével?
7. Egy derékszögű háromszög befogóinak hossza 12 cm és 16 cm. Számítsd ki a háromszög területét!
8. Egy egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogójának hossza 30 cm. Számítsd ki a háromszög területét!
9. Egy rombusz átlóinak hossza 8 cm és 12 cm. Mekkora a területe?
10. Egy rombusz területe 72 cm^2, az egyik átlójának hossza pedig 18 cm. Mekkora a másik átlója?
11. Egy trapéz alapjainak hosszai 12 cm és 8 cm, a magasság hossza pedig 5 cm. Számítsd ki a trapéz területét!
12. Egy trapéz területe 32 cm^2, az alapok hosszai 10 cm és 6 cm. Mekkora a trapéz magassága?
13. Az ábrán $ABCD$ egyenlő szárú trapéz, $m(\widehat{A}) = 45°$, $AB = 18$ cm és $DC = 8$ cm. Számítsd ki:
    a) a trapéz $[DE]$ magasságának hosszát; .... E: 5 cm.
    b) a trapéz területét; .... E: 65 cm^2.
    c) a trapéz kerületét. .... E: $(26 + 10\sqrt{2})$ cm.



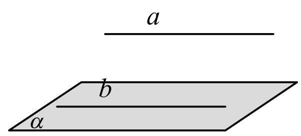
14. Számítsd ki a kör kerületét és területét, ha a kör sugarának hossza:
    a) 5 cm; b) 4 dm; c) 7 mm.
15. Egy egyenlő oldalú háromszög területe $75\sqrt{3}$ cm^2. Mekkora a háromszög oldala, apotémája, valamint a háromszög köré írt kör sugara?
16. Egy négyzet területe 200 cm^2. Mekkora a négyzet oldala, apotémája és a négyzet köré írt kör sugara?
17. Számítsd ki a szabályos hatszög oldalának és apotémájának hosszát, valamint a szabályos hatszög kerületét és területét, ha a szabályos hatszög köré írt kör sugarának hossza 3 cm!
18. Egy szabályos hatszög területe $150\sqrt{3}$ cm^2. Mekkora a hatszög oldala és az apotémája?

5. TÉRMÉRTAN

1. Párhuzamosság a térben

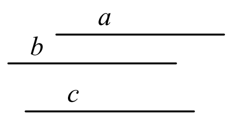
a) Egy egyenes párhuzamos egy síkkal, ha párhuzamos annak egy egyenesével.

Ha $a \parallel b$, $b \subset \alpha \Rightarrow a \parallel \alpha$.



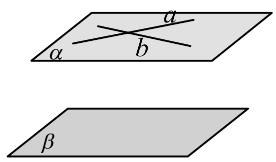
b) Ha két egyenes párhuzamos egy harmadikkal, akkor a két egyenes egymással is párhuzamos.

Ha $a \parallel b$ és $b \parallel c \Rightarrow a \parallel c$.



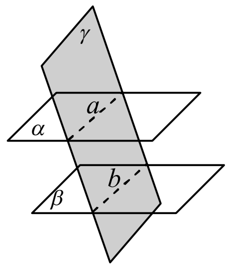
c) Két sík párhuzamos egymással, ha az egyik sík két metsző egyenese párhuzamos a másik síkkal.

Ha $a \parallel \beta$ és $b \parallel \beta$, $a, b \subset \alpha$ és $a \nparallel b \Rightarrow \alpha \parallel \beta$.



d) Ha két párhuzamos síkot metszünk egy harmadik síkkal, akkor a metszésvonalak párhuzamosak.

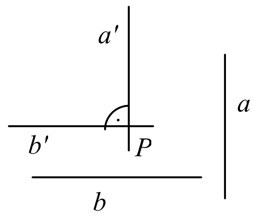
Ha $\alpha \parallel \beta$, $\gamma \cap \alpha = a$, $\gamma \cap \beta = b \Rightarrow a \parallel b$.



2. Merőlegesség a térben

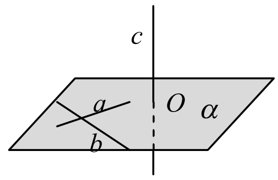
a) Az a és b térbeli egyenesek merőlegesek egymásra, ha egy P ponton keresztül az adott egyenesekkel húzott párhuzamosok merőlegesek egymásra.

$a \perp b$, ha $a' \parallel a, b' \parallel b$ és $a' \perp b'$.



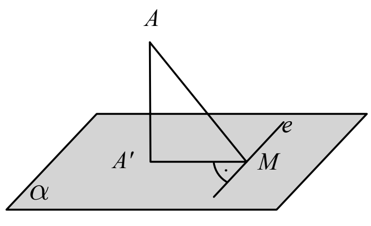
b) Egy egyenes merőleges a síkra, ha merőleges annak két, metsző egyenesére.

$c \perp \alpha$, ha $c \perp a$, $c \perp b$, ahol $a, b \subset \alpha$ és $a \nparallel b$.



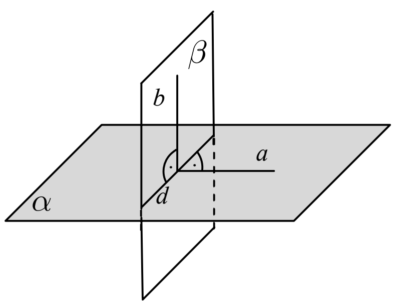
c) *A három merőleges tétele*
Ha $AA' \perp \alpha$, $A' \in \alpha$ és $A'M \perp e$, $M \in e$, $e \subset \alpha \Rightarrow AM \perp e$.

Fordított tételek
1.) Ha $AA' \perp \alpha$, $A' \in \alpha$ és $AM \perp e$, ahol $M \in e$, $e \subset \alpha$, akkor $A'M \perp e$.
2.) Ha $AA' \perp A'M$, $A'M \perp e$ és $AM \perp e$, ahol $A'M, e \subset \alpha$, $M \in e$, akkor $AA' \perp \alpha$.

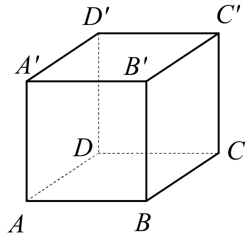


d) Egy sík merőleges egy másik síkra, ha tartalmaz egy olyan egyenest, amely merőleges a másik síkra.

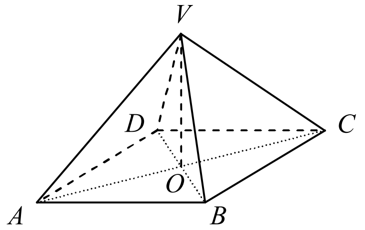
$\alpha \perp \beta \Leftrightarrow a \perp \beta$ és $a \subset \alpha$.



Feladatok



1. Az $ABCDA'B'C'D'$ kockában $AB = 10$ cm. Határozd meg:
   a) az AB és $A'C'$ egyenesek szögének mértékét; .... $45°$.
   b) az AC és $A'B$ egyenesek szögének mértékét; .... $60°$.
   c) az ABC' sík és DC egyenes kölcsönös helyzetét; .... párhuzmos.
   d) az A' pontnak a BC egyenestől való távolságát; .... $A'B = 10\sqrt{2}$.
   e) az AC' testátló hosszát;
   f) az ACD' háromszög területét.



2. Az ábrán látható $VABCD$ szabályos négyoldalú gúlában $VA = AB = 6$ cm. Számítsd ki:
   a) az alaplap területét;
   b) az AVC szög mértékét; .... $90°$.
   c) a BC és VA egyenesek szögének mértékét; .... $60°$.
   d) az A pont távolságát a VBD síktól. .... $AO = 3\sqrt{2}$.
   e) Igazold, hogy az AB egyenes párhuzamos a VDC síkkal!
3. Az $ABCDA'B'C'D'$ téglatestben $AB = 20$ cm, $BC = 15$ cm és $AA' = 9$ cm. (*Kövesd az 1. feladat ábráját!*) Számítsd ki:
   a) a testátló hosszát;
   b) a B' pontnak a DC egyenestől való távolságát;
   c) a B' pontnak az ABC' síktól való távolságát;
   d) az A' pontnak a BD egyenestől való távolságát.

VIZSGAFELKÉSZÍTŐ TESZT

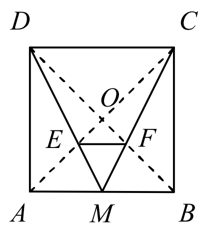
I.

1. A $36 + 42 : 7$ műveletsor eredménye…
2. A 72 és 18 számtani közepe…
3. Ha $A = \{3;7;9\}$ és $B = \{4;5;8\}$, akkor $A \cap B = \ldots$
4. Egy négyzet oldalának hossza 12 cm. A négyzet területe… cm^2.
5. Az $ABCDA'B'C'D'$ kockában a BC és $A'B'$ egyenesek által alkotott szög mértéke…°.
6. Annak valószínősége, hogy dobókockával 3-mal osztható számot dobjunk ...

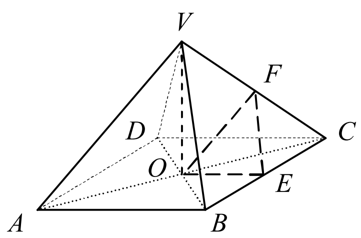
II.

1. Rajzolj egy V csúcsú és $ABCD$ alapú szabályos négyoldalú gúlát!
2. Két természetes szám összege 150, a két szám aránya pedig $\frac{3}{7}$. Határozd meg a két számot!
3. Egy bicikli árát 10%-kal növelték, majd 20%-kal csökkentették. A két árváltozás után a bicikli 528 lejbe került. Mennyi volt a bicikli eredeti ára?
4. Adott az $E(x) = x^2 - 10x + 25$ kifejezés, ahol $x \in \mathbb{R}$. Számítsd ki a kifejezés értékét $x = -2$ -re!
5. Oldd meg a valós számok halmazán az $x^2 = 144$ egyenletet!

III.



1. Az $ABCD$ négyzetben $AB = 9$ cm, M az AB oldal felezőpontja, $AC \cap BD = \{O\}$, $DM \cap AC = \{E\}$ és $CM \cap BD = \{F\}$.
   a) Igazold, hogy az $ABCD$ négyzet területe $81 cm^2$.
   b) Igazold, hogy E az ABD háromszög súlypontja!
   c) Számítsd ki az EMF háromszög területét!



2. Az ábrán látható $VABCD$ szabályos négyoldalú gúlában $VA = AB = 8$ cm, E a BC, F pedig a VC él felezőpontja.
   a) Igazold, hogy az OEF háromszög kerülete 12 cm!
   b) Bizonyítsd be, hogy $(VAB) \parallel (EOF)$!
   c) Számítsd ki a $VAOF$ négyszög területét!

Sok sikert! .... *Simon József*