A lehetetlenségre visszavezetés módszere
(A *reductio ad absurdum* módszere)

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

Ezt a módszert akkor alkalmazzuk, amikor könnyebb bizonyítani egy állítás ellentettjét, mintsem az állítást direktben.

Ez a módszer az indirekt bizonyítások közé tartozik, és tulajdonképpen azokkal egyenértékű. Egy feladat vagy tétel általában **A⇒B** alakú, ahol **A** a feltevés (hipotézis) és **B** a következmény (konklúzió). Mivel fennáll az **(A⇒B)≡(¬B⇒¬A)** azonosság, ezért nem direktbe bizonyítjuk, hogy **A**-ból levezethető **B**, hanem feltételezzük, hogy **B** nem igaz, vagyis **¬B** az igaz, és ebből korrekt logikai következtetéseket végezve *ellentmondásra* jutunk. Hogy mivel kerülhetünk ellentmondásra?

1) A kiinduló feltétellel, az **A**-val.
2) Valamilyen ismert **tétellel**.
3) Valamilyen **axiómával**.

Az *ad absurdum* módszerének a lényege tehát: feltételezzük, hogy a konklúzió nem igaz, vagyis **¬B,** és korrekt következtetéseket végezve **ellentmondásra** jutunk. Ez azt jelenti, hogy a feltételezésünk, hogy **B nem igaz** megdől, vagyis **¬B** az hamis, tehát a **B** konklúzió igaz kell legyen. Ezzel a bizonyítás véget ért.

<u>Példák:</u>

1) Legyen adott **a, b, c, d** négy **különböző** szám. Igazoljuk, hogy nem alkotható belőlük egy 2×2-es bűvös négyzet!

<u>Bizonyítás:</u> Feltételezzük az ellenkezőjét vagyis, hogy alkotható velük egy bűvös négyzet, legyen ez a következő:

a	**b**
c	**d**

Mivel ez bűvös négyzet következik, hogy: $a+b=c+d=a+c=b+d=a+d=b+c$ ahonnan mindenképpen következik, hogy b=c vagy a=b vagy a=c vagy a=d vagy b=d tehát ellentmondásba kerültünk azzal, hogy a, b, c, d mind KÜLÖNBÖZŐ számok.

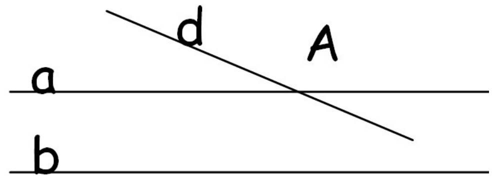
Ezúttal a feltevéssel jutottunk ellentmondásra.

2) Bizonyítsuk be, hogy egy konvex hatszögnek nem lehet 4 hegyes szöge!

<u>Bizonyítás</u>: Ismert tétel, hogy egy n-oldalú sokszög belső szögeinek az összege (n-2)×180° így hát a külső szögeinek az összege 2×180°=360°. Feltételezzük az ellenkezőjét vagyis, hogy egy konvex hatszögnek van 4 hegyes szöge. Akkor az ezek mellett fekvő külső szögek összege > 360°lenne, de ez ellentmond az említett tételnek. **Ezúttal egy tétellel jutottunk ellentmondásra.**

3) Igazoljuk, hogy ha a síkban egy (d) egyenes két párhuzamos a, b egyenesek közül metszi az egyiket (például az a-t), akkor metszi a másikat is.

<u>Bizonyítás:</u>



Feltételezzük az ellenkezőjét vagyis, hogy (d) nem metszi a (b) egyenest. Így hát csak $d \| b$ vagyis csak *párhuzamos* lehet b-vel. De ekkor az A ponton át a b egyeneshez 2 párhuzamos húzható, ami ellentmond a IX. axiómának (párhuzamossági axióma).
Ezúttal egy axiómával jutottunk ellentmondásra.

Megoldott feladatok:

A következőkben, a módszer jobb megértése és elmélyítése céljából bemutatunk néhány megoldott feladatot, a gimnáziumi és a középiskolai elemi matematika köréből.

1) Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt{2}$ nem racionális szám.

1. <u>Bizonyítás</u>: feltételezzük az ellenkezőjét vagyis, hogy $\sqrt{2}$ racionális szám. Ekkor léteznek olyan **(p, q)= 1** pozitív egész számok, $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ amelyekre ahonnan

$2q^2=p^2$ tehát p páros kell legyen. Legyen például p=2r, ahol r természetes szám. Visszaírva kapjuk, hogy $q^2=2r^2$. De ebből következik, hogy q is páros szám kell legyen. Legyen tehát q=2s. De ekkor azt kaptuk, hogy (p, q)= (2r, 2s)=1 ellentmondás lenne.

2) Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt{2}$ nem racionális szám.

2. <u>Bizonyítás:</u> feltételezzük az ellenkezőjét vagyis, hogy $\sqrt{2}$ racionális szám. Ekkor

léteznek olyan p, q pozitív egész számok, amelyekre $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. **Az ilyen létező p, q számok közül legyen p a legkisebb ami létezik.**
De fennáll az, hogy $2q^2=p^2$ tehát p páros kell legyen, vagyis p=2r, ahol r szintén természetes szám, és r< p, ami ellentmond annak, hogy p a leg kisebb.

3) Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ nem racionális szám.

<u>Bizonyítás:</u> feltételezzük az ellenkezőjét, vagyis, hogy $\sqrt{2}+\sqrt{3} = \frac{p}{q}$

Mindkét oldalt négyzetre emelve kapjuk, hogy $5+2\sqrt{6} = \frac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow \sqrt{6} = \frac{m}{n}$

vagyis $\sqrt{6}$ racionális lenne, de az előző bizonyítások mintájára igazolható, hogy ez nem igaz.

4) Két csoportra oszthatók-e a következő számok úgy, hogy az egyik csoportba tartozó számok összege 9-cel nagyobb legyen mint a másik csoportba tartozók összege? A számok: -7, -4, -2, 3, 5, 9, 10, 18, 21, 33

Megoldás: feltételezzük az ellenkezőjét, vagyis, hogy a két csoportba osztás megvalósítható. Ez azt jelenti, hogy ha elhagyjuk a 9-e számot, a többi szám összegének a fele egész szám, de ez nem így van, mert az összeg 77 ami páratlan.

5) Van-e olyan kétjegyű szám, amelynek legalább 4 különböző prímosztója van?

Megoldás: feltételezzük, hogy van ilyen szám. Akkor a 4 legkisebb prímszám 2, 3, 5 és 7. Ellenben $2\times3\times5\times7=210$ már nem kétjegyű, hanem háromjegyű szám.

6) Lehet-e 3 egymást követő pozitív egész szám összege prímszám?

Megoldás: feltételezzük, hogy a válasz igenlő, vagyis van 3 olyan egymás utáni pozitív egész szám, amelyeknek az összege prímszám. De mivel a három szám egymás utáni, ezért az alakjuk valamilyen sorrendben 3k, 3k+1 és 3k+2. De ha ezt a három számot összeadjuk, akkor egy 3-mal osztható összetett számot kapunk, vagyis nem prímszámot.

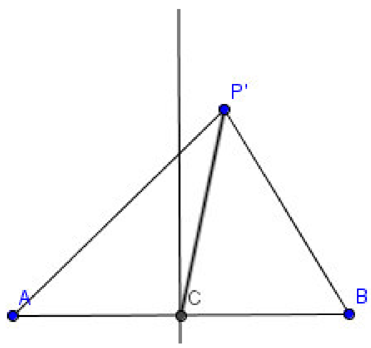
7) Van-e olyan tízes számrendszerbeli pozitív egész szám, amelyben a számjegyek szorzata 9900?

Megoldás: feltételezzük, hogy van ilyen szám. De ekkor mivel $9900=2^2\times3^2\times5^2\times11$ azt kapjuk, hogy a 11 számjegy kellene legyen, ami ellentmondás.

8) Három egymást követő prímszámot akkor nevezünk hármasikernek, ha a szomszédok közötti különbség 2. Hány ilyen hármasiker prímszám van?

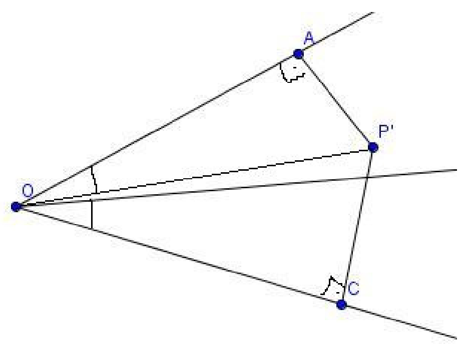
Megoldás: könnyen belátható, hogy 3, 5, 7 éppen egy ilyen prím hármasiker. Igazoljuk, hogy nincs több ilyen. Feltételezzük az ellenkezőjét, vagyis, hogy létezik olyan p prímszám, amelyre p, p+2 és p+4 mind prímszámok. Ellenben mivel p>3 ezért p=3k+1 vagy p=3k+2 alakú lehet, de ekkor vagy p+2 vagy p+3 osztható lesz 3-mal, vagyis nem lesz prím, ellentmondás.

9) Igazoljuk, hogy az AB szakasz felező merőlegesén kívül nincs a síkban olyan P pont, amelyre PA=PB legyen!



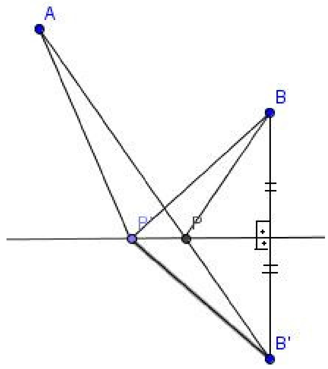
Bizonyítás: feltételezzük az ellenkezőjét vagyis, hogy a szakaszfelező merőlegesen kívül is van olyan P' pont amelyre P'A=P'B. Ez azt jelenti, hogy az ABP' háromszög egyenlő szárú. Ha C az AB szakasz felezőpontja, akkor mivel ABC=CB és AP'=P'B és P'C közös, ezért az ACP' háromszög kongruens a BCP' háromszöggel, így ACP' ∠ = BCP' ∠, ami azt jelenti, hogy ez a két szög mindegyike 90°-os, vagyis P'C merőleges az AB-re, ami azt jelenti, hogy P' a szakaszfelező merőlegesen van, ami absurdum.

10) Igazoljuk, hogy az AOB szög szögfelezőjén kívül nincsen olyan P pont amelyre d(P,OA)= d(P,OB).



Bizonyítás: feltételezzük az ellenkezőjét vagyis, hogy a szögfelezőn kívül is van olyan P’ pont amelyre d(P’,OA)= d(P’,OB). De ekkor Pitagorász tétele értelmében OA=OB lesz, így az OAP’ háromszög kongruens lesz az OBP’ háromszöggel, ezért AOP’ $\angle$ = BOP’ $\angle$ ami azt jelentené, hogy a P’ pont éppen az AOB szög szögfelezőjén van, ez ellentmondás.

11) Adott a síkban egy (d) egyenes, és ennek ugyanazon az oldalán két különböző pont, az A és a B. Keressük meg a (d) egyenes azon P pontját, amelyre a PA+PB összeg minimális!

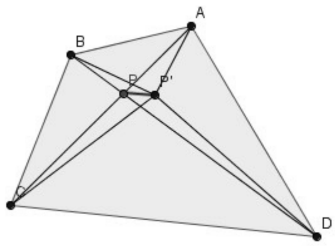


Megoldás: tükrözzük a B pontot a (d) egyenesre, és legyen B’ a B pont szimmetrikusa. Az AB’ egyenes a (d) egyenest P pontban metszi. Ekkor PA+PB=PA+PB’= AB’, és igazoljuk, hogy ez a P pont amelyre a szóban forgó összeg a leg kisebb. Feltételezzük az ellenkezőjét vagyis, hogy létezik olyan P’ pont a (d) egyenesen, amelyre P’A+ P’B <PA+ PB. Ellenben a háromszög egyenlőtlensége alapján

P’A+P’B= P’A+ P’B’> AB’= AP+PB’=PA+PB

vagyis ellentmondáshoz jutottunk.

12) Az ABCD konvex négyszög belsejében keressük meg azt a P pontot, amelyre a PA+PB+PC+PD összeg minimális.

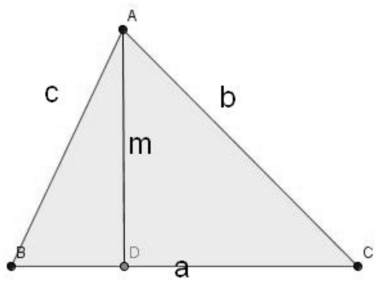


Megoldás: Igazolni fogjuk, hogy a szóban forgó P pont éppen az AC és BD átlók metszéspontja lesz. Feltételezzük az ellenkezőjét vagyis, hogy az átlók metszéspontján kívül létezik olyan P’ pont amelyre P’A+P’B+P’C+P’D< PA+PB+PC+PD.

A háromszög egyenlőtlensége alapján felírható, hogy

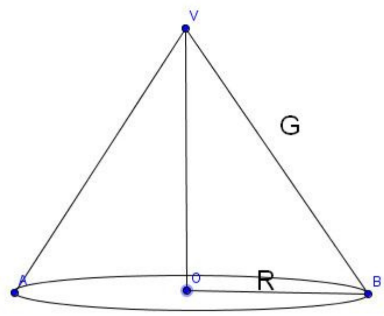
P’A+ P’C > AC = PA+ PC és P’B+ P’D> BD= PB+ PD és ezek összegzéséből adódik, hogy P’A+P’B+P’C+P’D> PA+PB+PC+PD és ez ellentmondás.

13) Van-e olyan háromszög, amelynek minden magassága nagyobb mint 2 cm, és a területe pedig kisebb mint 2 cm^2?



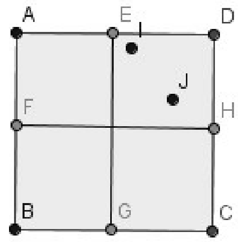
Megoldás: feltételezzük, hogy van ilyen háromszög, és a háromszög oldalait jelöljük a csúcsoknak megfelelő kisbetűkkel. Mivel T=a×m/2 innen a×m=2T < 4. Ezért 4> am>2a ahonnan a<2 következik. teljesen hasonlóan következik, hogy b <2 és c< 2 is igaz. De az ABD derékszögű háromszögben az átfogó nagyobb mint a befogó, ezért c>m de 2>c így 2>m ellentmondáshoz jutottunk.

14) Igazoljuk, hogy nincs olyan egyenes körkúp, amelynél az alap területe egyenlő a palást területével!



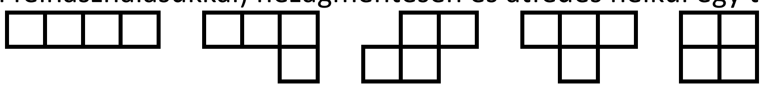
Bizonyítás: feltételezzük az ellenkezőjét vagyis, hogy létezik ilyen körkúp. Az alap területe T=R$^2\pi$, a palást területe pedig= $P=R\pi G$, ezért a T=P alapján $R^2\pi= R\pi G$ ahonnan R=G adódik, vagyis egy derékszögű háromszög befogója és átfogója egyenlő, ellentmondás.

15) Egy ABCD egységnyi oldalú négyzetben adott 5 pont. Igazoljuk, hogy nem lehet, hogy bármelyik két pont távolsága nagyobb legyen mint $\sqrt{2}./2$



Bizonyítás: feltételezzük, hogy bármelyik két pont közötti távolság nagyobb mint $\sqrt{2}/2$. Ekkor osszuk fel a négyzetet 4 egybevágó kis négyzetre. Lesz olyan kisnégyzet amelyikbe legalább 2 pont kerül, és ezek közötti távolság nem lehet nagyobb mint a kisnégyzet átlója, a $\sqrt{2}/2$ Ezzel ellentmondásra jutottunk.

16) A mellékelt ábrán öt alakzatot, úgynevezett tetraminót látunk. Mindegyik alakzat négy egybevágó egységnégyzetből áll. Össze lehet-e rakni ezekből (maradék nélküli felhasználásukkal) hézagmentesen és átfedés nélkül egy téglalapot?



Megoldás: feltételezzük az ellenkezőjét vagyis, hogy összerakható egy téglalap. Ha a megadott alakzatokat a sakktábla mintájára színezzük ki, akkor négy alakzaton 2-2 világos, illetve sötét mező lesz, egyen pedig 3, illetve 1 (vagy fordítva). Így a négy alakzaton együttesen nem egyenlő a világos és a sötét mezők száma, ellentmondás, tehát nem lehet belőlük téglalapot összeállítani.

17) Igazoljuk, hogy $10^{2014}+5$ nem négyzetszám!
Bizonyítás: Feltételezzük az ellenkezőjét vagyis, hogy $10^{2013}+5=k^2$ vagyis $100\ldots005=k^2$ de $(1+5)\vdots 3$, így $k^2\vdots 3$, ezért $k \vdots 3$. De így $100\ldots005 \vdots 9$, és ez azt jelentené, hogy $(1+5)\vdots 9$ ami absurdum. Az előbbiekben a 9-cel való osztási szabállyal jutottunk ellentmondásba.

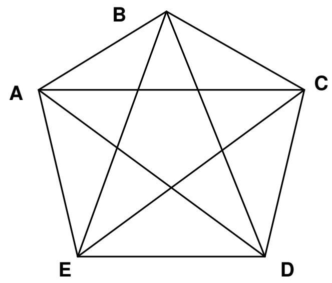
18) Igazoljuk, hogy ha n≥1, akkor a $\frac{21n+4}{14n+3}$ tört egyszerűsíthetetlen!
Bizonyítás: Feltételezzük, hogy a tört egyszerűsíthető egy $d\neq 1$ pozitív egész számmal. Ekkor $d \mid 21n+4$ és $d \mid 14n+3$ és ezek alapján $d \mid 42n+8$ és $d \mid 42n+9$ ahonnan azt kapjuk, hogy $d \mid 1$ vagyis d=1 ami ellentmondás.

19) Bizonyítsuk be, hogy ha a, b, c páratlan egész számok, akkor az $ax^2+bx+c=0$ egyenletnek nincs egész gyöke!
Bizonyítás: feltételezzük az ellenkezőjét vagyis, hogy páratlan a, b, c értékek mellett is az egyenletnek van x=k egész megoldása. Ekkor $ak^2+bk+c=0$ vagyis $k(ak+b)=-c$ ahonnan $k \mid c$ következne, ezért k=2n+1 kell legyen, de ezt visszahelyettesítve az egyenletbe $a(2n+1)^2+b(2n+1)+c=0$ ellentmondásra jutunk, hiszen páratlan számok összege nem lehet nulla.

20) Igazoljuk, hogy végtelen sok prímszám van (Euklidész)
Bizonyítás: Feltételezzük az ellenkezőjét, tehát csak véges számú prímszám van, legyenek ezek p_1, p_2, …, p_n. Képezzük az $N= p_1,\times p_2\times \ldots \times p_n+ 1$ számot. Ez vagy

összetett, vagy prím. Ha összetett lenne, akkor lennének prímosztói, de ezek csak a p_k közül lehetnek, de ez nem lehet, mert N nem osztható egyik p_k prímszámmal sem. Tehát N nem összetett, ezért prím, így mivel nagyobb bármelyik p_k prímszámnál, ezért egy újabb prímszámot kaptunk, ami ellentmond annak, hogy $p_1, p_2, \ldots, p_n$ az összes prímszám.

21) Az ABCDE konvex ötszög minden oldalát és átlóját vagy kékre, vagy pirosra színezzük úgy, hogy nincsen azonos oldalszínű háromszög. Igazoljuk, hogy ekkor minden csúcsból pontosan 2 piros és pontosan 2 kék szakasz indul ki!



__Bizonyítás__: feltételezzük az ellenkezőjét, így hát létezik olyan csúcs, amelyikből legalább 3 egyszínű szakasz indul ki, legyen például ez AB, AC és AD és legyenek éppen pirosak.
Ekkor az ABC háromszögben BC piros kell legyen, az ACD háromszögben DC is piros kell legyen, és az ABD háromszögben BD is piros kell legyen, de ez ellentmond az azonos színű háromszög létezésének.

22) Igazoljuk, hogy az $x^2+y^2=3(z^2+t^2)$ egyenletnek nincs pozitív egész megoldása!
__Bizonyítás:__ feltételezzük az ellenkezőjét vagyis, az egyenletnek van (x_0, y_0, z_0, t_0) pozitív egész megoldása, ahol legyen x_0 a létező x értékek közül a leg kisebb.
Tehát $x_0^2+y_0^2=3(z_0^2+t_0^2)$. De a $3 \mid x_0^2+y_0^2$ alapján $3 \mid x_0^2$ és $3 \mid y_0^2$ ahonnan $3 \mid x_0$ és $3 \mid y_0$ tehát $x_0=3x_1$ és $y=3y_1$. Ezt visszaírva az egyenletbe kapjuk, hogy $9(x_1^2+y_1^2)=3(z_0^2+t_0^2)$ vagyis $3(x_1^2+y_1^2)=z_0^2+t_0^2$. És mivel $3 \mid z_0^2$ és $3 \mid t_0^2$ ezért $3 \mid z_0$ és $3 \mid t_0$ ezért visszaírva az egyenletbe kapjuk, hogy
$3(x_1^2+y_1^2)=9(z_1^2+t_1^2)$ vagyis $x_1^2+y_1^2)=3(z_1^2+t_1^2)$ ami azt jelenti, hogy (x_1, y_1, z_1, t_1) egy újabb megoldása az eredeti egyenletnek, ahol az $x_0=3x_1$ miatt x_1 egy kisebb megoldás mint x_0, és ez ellentmondás.