Műveletek a valós számok halmazán

Műveletek természetes-, egész-, tört- és irracionális számokkal

1. Számítsd ki az S= 1+2+3+…+100 összeget!
2. Általánosítás: Igazold, hogy minden $n\in N^*$ esetén $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$
3. Számítsd ki az S= 1+3+5+…+101 összeget!
4. Általánosítás: Igazold, hogy minden $n\in N^*$ esetén $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$
5. Igazold, hogy a 2+4+6+…+100+51 szám négyzetszám!
6. Általánosítás: Igazold, hogy minden $n\in N^*$ esetén a 2+4+6+…+2n+(n+1) szám négyzetszám!
7. Számítsd ki az S=1-2+3-4+…-98+99 összeget!
8. Általánosítás: Ha $n\in N^*$, számítsd ki az S=1-2+3-4+…-2n+(2n+1) összeget!
9. Számítsd ki az S= -1-2+3+4-5-6+7+8-…-97-98-99+100 összeget!
10. Számítsd ki az $S=1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+99^2-100^2$ összeget!
11. Általánosítás: Igazold, hogy minden $k\in N^*$ esetén
    $1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(2k-1)^2-(2k)^2=-k(2k+1)$
12. Számítsd ki az $S=1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+99^2-100^2+101^2$ összeget!
13. Általánosítás: Igazold, hogy minden $k\in N^*$ esetén
    $1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(2k-1)^2-(2k)^2+(2k+1)^2=(k+1)(2k+1)$
14. Általánosítás: Igazold, hogy minden $n\in N^*$ esetén

    $1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$
15. Melyik nagyobb $a=10^{100}$ vagy $b=100^{10}$?
16. Melyik nagyobb $a=4^{37}$ vagy $b=8^{24}$?
17. Melyik nagyobb $a=11^{114}$ vagy $b=5^{171}$?
18. Melyik nagyobb $a=222^{333}$ vagy $b=333^{222}$?
19. Rendezd növekvő sorrendbe az $x=2^{100}$, $y=3^{75}$, $z=5^{50}$ számokat!
20. Hasonlítsuk össze az $a=n^{n^n}$ és a $b=(n^n)^n$ számokat, ha $n\in N^*$!
21. Mennyi az $a=10^{n+1}+2\cdot10^n+4$ szám számjegyeinek az összege, ha $n\in N^*$?

22. Számítsd ki: $\left[2^{12}\cdot 2^{18}+25^{35}:5^{10}-\left(3^{5^2}\right)\right]:\left[4^2\cdot 2^3\cdot 2^{23}+\left(5^{15}\right)^{2^2}-\left(3^2\right)^{5^2}\right]$!

23. Hozzuk egyszerűbb alakra: E= $(a+b)\left(a^2+b^2\right)\left(a^4+b^4\right)\left(a^8+b^8\right)$ ha a, b∈ R és a $a\neq b$!

24. Általánosítás: Hozzuk egyszerűbb alakra az E= $(a+b)\left(a^2+b^2\right)\left(a^4+b^4\right)...\left(a^{2^n}+b^{2^n}\right)$ kifejezést, ha a, b∈ R és $a\neq b$, n∈ N*!

25. Van-e a $\pm$ előjeleknek olyan választása amelyre: $\pm1\pm2\pm3\pm4=0$? Hát amelyre $\pm1\pm2\pm3\pm...\pm99\pm100=0$?

26. Általánosítás: Igazoljuk, hogy ha k∈ N*, akkor van-e a $\pm$ előjeleknek olyan választása amelyre $\pm1\pm2\pm3\pm...\pm(4k-1)\pm(4k)=0$?

27. Van-e a $\pm$ előjeleknek olyan választása amelyre: $\pm1\pm2\pm3=0$? Hát amelyre $\pm1\pm2\pm3\pm...\pm102\pm103=0$?

28. Általánosítás: Igazoljuk, hogy ha k∈ N*, akkor van-e a $\pm$ előjeleknek olyan választása amelyre $\pm1\pm2\pm3\pm...\pm(4k+2)\pm(4k+3)=0$?

29. Általánosítás: Igazoljuk, hogy ha n= 4k+1 és n, k ∈ N*, akkor a $\pm$ előjeleknek nincsen olyan választása amelyre $\pm1\pm2\pm3\pm...\pm(n-1)\pm n=0$?

30. Általánosítás: Igazoljuk, hogy ha n= 4k+2 és n, k ∈ N*, akkor a $\pm$ előjeleknek nincsen olyan választása amelyre $\pm1\pm2\pm3\pm...\pm(n-1)\pm n=0$?

31. Ha n, m ∈ N*, és $E=(-1)^m\cdot(-3)+(-1)^n\cdot 5-(-1)\cdot 7+5$, akkor mennyi az E legnagyobb illetve legkisebb értéke?

32. Számítsd ki az $S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{10}}$ értékét!

33. Általánosítás: Ha n∈ N* számítsd ki az $S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}$ értékét!

34. Általánosítás: Ha n∈ N* és a∈ R*+, számítsd ki az $S=1+a+a^2+...+a^n$ értékét!

35. Ellenőrizd, hogy ha k∈ N*, akkor $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$, majd ezt használva számítsd ki az $S=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{99\cdot 100}$ összeget!

36. Igazold, hogy $\frac{1}{6}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}+\frac{1}{60}+...+\frac{1}{270}=0,3$!

37. Általánosítás: Igazold, hogy ha n∈ N*, akkor $S=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{(n-1)\cdot n}=\frac{n-1}{n}$!

38. Ellenőrizd, hogy ha k∈ N*, akkor $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k}$, majd ezt használva igazold, hogy

$\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+...+\frac{1}{100} < 0,9$!

39. Számítsd ki a $P=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)...\left(1+\frac{1}{100}\right)$ szorzatot!

40. Általánosítás: Ha n∈ N* számítsd ki a $P=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)...\left(1+\frac{1}{n}\right)$ szorzatot!

41. Számítsd ki a $P=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)...\left(1-\frac{1}{100^2}\right)$ szorzatot!

42. Általánosítás: Ha n∈ N* számítsd ki a $P=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

szorzatot!

43. Számítsd ki: a) $\left(\frac{112}{113}+\frac{112112}{113113}\right)\cdot\frac{1}{2}$ b) $\left(\frac{112}{113}+\frac{112112}{113113}+\frac{112112112}{113113113}\right)\cdot\frac{1}{3}$!

44. Számítsd ki: $E=\left(\frac{-243}{32}\right)^{-27} : \left[\left(\frac{16}{81}\right)^{-2}\right]^{-17}$!

45. Számítsd ki: $E=\left(2^{-5}\right)^7+\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^7\right]^5+\left(-\frac{1}{4}\right)^{35}+\left(-2\right)^{70}$!

46. Számítsd ki: $P=\frac{1}{10}\cdot\left(-\frac{2}{15}\right)\cdot\left(\frac{3}{20}\right)\cdot\left(-\frac{4}{25}\right)\cdot...\cdot\left(-\frac{1990}{9955}\right)\cdot 5^{1990}$!

47. Számítsd ki: $S=\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+...+\frac{1}{1+2+3+...+100}$!

48. Általánosítás: Ha n∈ N* számítsd ki az $S=\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+...+\frac{1}{1+2+3+...+n}$

összeget!

49. Számítsd ki a következő összeget: $S=\frac{12}{11}+\frac{13}{22}+\frac{14}{33}+...+\frac{110}{1089}-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{99}\right)$!

50. Számítsuk ki a következő törtek értékét:

a) $A=\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+...+\frac{1}{98}-\frac{1}{100}}{-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-\frac{1}{9}+\frac{1}{12}-...-\frac{1}{147}+\frac{1}{150}}$ b) $B=\dfrac{2\cdot3+4\cdot6+6\cdot9+...+2000\cdot3000}{3\cdot5+6\cdot10+9\cdot15+...+3000\cdot5000}$

c) $C=\dfrac{0,1+0,2+0,3+...+0,9}{0,01+0,02+0,03+...+0,09}$ d) $D=\dfrac{1111+2222+3333+...+9999}{11+22+33+...+99}$

51. Számítsuk ki a következő törtek értékét:

a) $A=\dfrac{1}{10^{-99}+1}+\dfrac{1}{10^{-98}+1}+...+\dfrac{1}{10^{0}+1}+...+\dfrac{1}{10^{98}+1}+\dfrac{1}{10^{99}+1}$

b) $B=\left(\dfrac{1}{19}+\dfrac{2}{19}+...+\dfrac{18}{19}\right)+\left(\dfrac{1}{20}+\dfrac{2}{20}+...+\dfrac{19}{20}\right)+\left(\dfrac{1}{21}+\dfrac{2}{21}+...+\dfrac{20}{21}\right)+\left(\dfrac{1}{22}+\dfrac{2}{22}+...+\dfrac{21}{22}\right)$

52. Számítsuk ki: $B=\dfrac{(-2)^{1}+(-2)^{2}+(-2)^{3}+...+(-2)^{100}}{2^{1}+2^{3}+2^{5}+...2^{99}}$!

53. Számítsuk ki: $S=1+11\cdot 12-11^{2}\cdot 12+11^{3}\cdot 12+...+11^{19}\cdot 12-11^{20}\cdot 12+11^{21}$!

54. Számítsuk ki a következő törtek értékét:

a) $\dfrac{1234567890}{1234567891^{2}-1234567890\cdot 1234567892}$ **b)** $\dfrac{423134\cdot 846267-423133}{423133\cdot 846267+423134}$

54. Igazoljuk**,** hogy: $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+...-\dfrac{1}{10}=\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{13}+...+\dfrac{1}{20}$ **!**

55. Igazoljuk, hogy a következő szám négyzetszám**:**

$$a=\frac{1}{7}+\frac{9}{14}+\frac{10}{21}+...+\frac{70}{441}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{63}\right)\,\textbf{!}$$

56. Számítsuk ki: a) $A=2-\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+...+\dfrac{1}{2^{100}}\right)$ b) $B=1+1+2+2^{2}+2^{3}+...+2^{2014}$

c) $C=\left(2-\dfrac{3}{2}+\dfrac{4}{3}-\dfrac{5}{4}+...-\dfrac{2013}{2012}\right)-\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+...-\dfrac{1}{2012}\right)$

57. Milyen számjegy áll a következő törtek tizedes alakjában a tizedes vessző utáni 2015. helyen?

a) $\dfrac{1}{7}$ b) $\dfrac{3}{35}$

58. Ha n∈ N^* milyen tizedes törtet állítanak elő az A, B, C közönséges törtek:

$$A=\frac{1}{10n+1}\,\textbf{,}\qquad B=\frac{1}{10n+2}\qquad C=\frac{1}{10n+5}\,\textbf{?}$$

59. Ha n∈ N^* milyen tizedes törtet állít elő a következő közönséges tört: $E=\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}$ **?**

60. Ha n∈ N^* milyen tizedes törtet állít elő a következő közönséges tört:

$$E=\frac{2^{n+4}+27\cdot 2^{n+1}+3^{n+4}+8\cdot 3^{n+1}}{4^{n+4}+5^{3}\cdot 4^{n+1}+5^{n+4}+4^{3}\cdot 5^{n+1}}\ ?$$

61. Hasonlítsuk össze az $a = 2014\sqrt{2015}$ és $b = 2015\sqrt{2014}$ számokat!

62. Írjuk növekvő sorrendbe a következő számokat: $a = -4\sqrt{11},\ b = -6\sqrt{8},\ c = -3\sqrt{13}$

63. Ellenőrizd, hogy igaz-e: $\dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1} = \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-2}{2}$!

64. Igazold, hogy: $\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}} = \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$!

65. Igazold, hogy $\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} + \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = 4$!

66. Hozd egyszerűbb alakra: a) $\sqrt{7-\sqrt{40}}$, b) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$, c) $\sqrt{10+4\sqrt{6}}$, d) $\sqrt{2\sqrt{5}+6}$, e) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$.

67. Igazold, hogy $\sqrt{7-2\sqrt{3}} + \sqrt{7+2\sqrt{3}} = 4$!

68. Igazold, hogy $\sqrt{(3+4\sqrt{2})(5-\sqrt{2})(17\sqrt{2}-7)} \in N$!

69. Hozd egyszerűbb alakra: $\sqrt{2}+\sqrt{8}+\sqrt{18}+\sqrt{32}+...+\sqrt{200}$!

70. Igazold, hogy $\sqrt{100+2+4+6+...+198} \in N$!

71. Igazold, hogy $\sqrt{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 29\cdot 30} \notin Q$!

72. Általánosítás: Igazold, hogy ha n∈ N*és $n \neq 1$, akkor $\sqrt{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot (n-1)\cdot n} \notin Q$!

73. Igazold, hogy $S = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}} \in N$!

74. Általánosítás: Igazold, hogy ha n∈ N*, akkor

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = \sqrt{n}-1 \,!$$

75. Általánosítás: Igazold, ha n∈ N*, akkor

$$S = \sqrt{3-2\sqrt{2}} + \sqrt{5-2\sqrt{6}} + \sqrt{7-2\sqrt{12}} + ... + \sqrt{2n+1-2\sqrt{n(n+1)}} = \sqrt{n+1}-1$$

76. Számítsd ki: $S = \dfrac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)} + \dfrac{1}{\sqrt{6}(\sqrt{3}+\sqrt{2})} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{9900}(\sqrt{100}+\sqrt{99})}$!

77. Általánosítás: Ha n∈ N*, akkor számítsd ki a következő összeget:

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)} + \frac{1}{\sqrt{6}(\sqrt{3}+\sqrt{2})} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2-n}(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})} \,!$$

78. Számítsd ki: $S=\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}$!

79. Általánosítás: Ha $n\in N^*$, akkor számítsd ki a következő összeget:

$$S=\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{n\sqrt{n-1}+(n-1)\sqrt{n}}$$

80. Számítsd ki: $S=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{1+2}}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{1+2+3}}+\ldots+\frac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{\sqrt{1+2+3+\ldots+99}}$!

81. Általánosítás: Ha $n\in N^*$, akkor számítsd ki a következő összeget:

$$S=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{1+2}}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{1+2+3}}+\ldots+\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{1+2+3+\ldots+n}}\ !$$

82. Igazold, ha $x\in[1,2]$, akkor $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2$!

83. Igazold, ha $x\in[2,6]$, akkor $\sqrt{x+2+4\sqrt{x-2}}+\sqrt{x+2-4\sqrt{x-2}}=4$!

84. Számítsd ki: $P=\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$!

85. Igazoljuk, hogy $\sqrt{26+6\sqrt{13-4\sqrt{8+2\sqrt{6-2\sqrt{5}}}}}+\sqrt{26-6\sqrt{13+4\sqrt{8-2\sqrt{6+2\sqrt{5}}}}}\in N$!

86) Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt{S}\in N$, ahol
$S=\sqrt{1}+\sqrt{1+3+5}+\sqrt{1+3+5+7+9}+\ldots+\sqrt{1+3+\ldots+2013}$!