FELVÉTELI VIZSGÁRA KÉSZÜLŐ TANULÓK FIGYELMÉBE!

A SZINUSZ ÉS KOSZINUSZ TÉTEL NÉHÁNY ALKALMAZÁSA

Tuzson Zoltán tanár, Székelyudvarhely

A trigonometriát kezdetben nem tekintették önálló matematikai diszciplínának. A csillagászat segédeszközeként jött létre; az a tudományág, amely a trigonometriai függvényeket és ezek segítségével a háromszögek megoldását tárgyalja.

A háromszög oldalai és szögei közötti alapvető összefüggéseket a szinusztétel (Sz.) és a koszinusztétel (K.) fejezi ki.

Mivel a trigonometria mértani alkalmazásainál mind a tankönyvek, mind a feladatgyűjtemények zöme olyan jellegű feladatokat tűz ki, melyeknek megoldása nagy mennyiségű képlet ismeretét feltételezi (s így csak a nagyon jó tanulók képesek megoldani), szükségesnek láttuk olyan feladatanyag összeválogatását, mely csak a szinusz- és koszinusztételt, valamint algebrai számításokat igényel.

A következőkben a háromszögben szokásos jelöléseket használjuk: a, b, c az oldalhosszakat, T a területet, p a félkerületet, R a háromszög köré írt kör sugarát, r a beírt kör sugarát, h_a, h_b, h_c (az a, b és c oldalakhoz tartozó) magasságok hosszát, m_a, m_b, m_c az oldalfelezők hosszát, i_a, i_b, i_c pedig a megfelelő szögfelezők hosszát jelöli. Az A, B, C jelölésekkel az illető szög mértékszámát jelöljük.

A következő gyakorlatok és feladatok megoldása által a tanulók jelentős jártasságra, készségre és önbizalomra tehetnek szert a trigonometriai feladatok mértani alkalmazásai terén.

(1) Bármely háromszögben $T = \frac{bc}{2}\cdot\sin A$ és analógjai.

(2) Bármely háromszögben $R = \frac{abc}{4T}$.

(3) Bármely háromszögben $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (szinusztétel).

(4) Bármely háromszögben $a = b\cos C + c\cos B$ és analógjai (vetületek-tétele).

(5) Bármely háromszögben $a^2 = b^2+c^2-2bc\cos A$ és analógjai (koszinusztétel).

(6) Bármely háromszögben $T = \frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}$ és analógjai.

(7) Ha egy háromszögben $a\sin B + b\sin A = 2c\sin C$ és $b\sin C + c\sin B = 2a\sin A$, akkor az ABC háromszög egyenlő oldalú.

(8) Bármely háromszögben
$\sqrt{a\sin A}+\sqrt{b\sin B}+\sqrt{c\sin C} = \sqrt{2p(\sin A+\sin B+\sin C)}$.

(9) Bármely háromszögben $\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C = \frac{T}{2R^2}$.

(10) Bármely háromszögben $\sin A+\sin B+\sin C = \frac{p}{R}$.

(11) Ha egy háromszögben $b+c = 3a$, akkor $\sin B+\sin C = 3\sin A$.

(12) Bármely háromszögben $b\cos C - c\cos B = \frac{b^2-c^2}{a}$ és analógjai.

(13) Ha $b\cos C = c\cos B$, akkor az ABC háromszög egyenlő szárú.

(14) Ha $b^2+2ac\cos B = a^2+2bc\cos A$, akkor az ABC háromszög egyenlő szárú.

(15) Ha $a = 2b\cos C$, akkor az ABC háromszög egyenlő szárú.

(16) Ha $a\cos A = b\cos B$, akkor az ABC háromszög egyenlő szárú vagy derékszögű.

(17) Ha $\cos B+\cos C = \frac{b+c}{a}$ akkor az ABC háromszög derékszögű.

(18) Bármely háromszögben $\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$.

(19) Bármely háromszögben
$(a+b)\cdot\cos C+(b+c)\cdot\cos A+(c+a)\cdot\cos B = a+b+c$.

(20) Ha $M \in (BC)$, akkor $AM^2 = \frac{b^2\cdot MB+c^2\cdot MC}{a} - MB\cdot MC$ (Stewart tétele).

(21) Bármely háromszögben $m_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}$ és analógjai (oldalfelező-tétel).

(22) Bármely háromszögben $i_a^2 = bc\left[1-\left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right]$ és analógjai (szögfelező-tétel).

(23) Bármely háromszögben $m_a^2+m_b^2+m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$.

(24) Bármely háromszögben $m_a^4+m_b^4+m_c^4 = \frac{9}{16}(a^4+b^4+c^4)$.

(25) Ha $b^2+c^2 = 2a^2$, akkor $m_b^2+m_c^2 = 2m_a^2$ és $c\cdot m_c = b\cdot m_b$.

(26) Ha $A \neq 90°$, akkor $4T = (4m_a^2-a^2)\,\mathrm{tg}A$ és analógjai.

(27) Ha $i_a = \frac{\sqrt{2}\cdot bc}{b+c}$, akkor az ABC háromszög derékszögű.

(28) Ha $\frac{b+c}{a} = \frac{h_a}{i_a}\cdot\sqrt{2}$, akkor az ABC háromszög derékszögű.

(29) Ha $\frac{b^3+c^3-a^3}{b+c-a} = a^2$, akkor $A = 60°$.

(30) Ha $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$, akkor $B = 60°$.

(31) Ha $c(a+b-c)-a(b+c-a)+b(a+c-b) = bc$, akkor $A = 60°$.

(32) Ha $a = \sqrt{6}$, $A = 60°$, $b+c = 3+\sqrt{3}$, számítsuk ki T értékét.

(33) Ha $(b+c)\cdot a = b^2+c^2$ és $b+c = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$, akkor $A = 30°$.

(34) Ha $b^2-c^2 = 2a^2$, akkor $A \leq 30°$.

(35) Ha $b^2+c^2 = 2a^2$, akkor $A \leq 60°$.

(36) Ha $a < \frac{b+c}{2}$, akkor $A < \frac{B+C}{2}$.

(37) Ha $b+c = 2a$ és $B+C = 2A$, akkor az ABC háromszög egyenlő oldalú.

(38) Bármely háromszögben $\frac{a}{b} = \frac{c+\cos A(a\cos C-c\cos A)}{c\cos C+a\cos A}$.

(39) Bármely háromszögben $\sin^2 A+2\sin B\sin C\cos A = \sin^2 B+\sin^2 C$.

(40) Bármely háromszögben $4R^2\cdot(\sin^2 B+\sin^2 C-\sin^2 A) = 2bc\cos A$.

(41) Ha $\sin A = 2\sin B\sin C$, akkor az ABC háromszög egyenlő szárú.

(42) Ha $\sin A = \frac{\sin B+\sin C}{\cos B+\cos C}$, akkor az ABC háromszög derékszögű.

(43) Bármely háromszögben $\frac{bc\cdot\cos A+ca\cdot\cos B+ab\cdot\cos C}{a\sin A+b\sin B+c\sin C} = R$.

(44) Bármely háromszögben $\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos A+\cos B+\cos C} = \frac{p}{R+r}$.

(45) Ha $E_1 = \frac{a^2\sin B\cos C}{\sin A}+\frac{b^2\sin C\cos A}{\sin B}+\frac{c^2\sin A\cos B}{\sin C}$ és

$E_2 = \frac{a^2\cos B\sin C}{\sin A}+\frac{b^2\cos C\sin A}{\sin B}+\frac{c^2\cos A\sin B}{\sin C}$, akkor $E_1=E_2$.

(46) Bármely háromszögben $\mathrm{ctg}A+\mathrm{ctg}B+\mathrm{ctg}C = \frac{R(a^2+b^2+c^2)}{abc}$.

(47) Bármely háromszögben $a\,\mathrm{ctg}A+b\,\mathrm{ctg}B+c\,\mathrm{ctg}C = 2(R+r)$.

(48) Bármely háromszögben $\cos A+\cos B+\cos C = 1+\frac{r}{R}$.

(49) Bármely háromszögben

$$16T^2 = 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4).$$

(50) Ha $b^2+c^2 = 2a^2$, akkor $8T = \sqrt{16b^2c^2-(b^2+c^2)^2}$.

(51) Bármely háromszögben $a\cos A+b\cos B+c\cos C = \frac{2T}{R}$.

(52) Ha $A \neq 90°$, $B \neq 90°$ és $a^2\mathrm{tg}B = b^2\mathrm{tg}A$, akkor az ABC háromszög egyenlő szárú vagy derékszögű.

(53) Ha $A \neq 90°$, akkor $(b^2+c^2-a^2)\mathrm{tg}A = 4T$.

(54) Ha $A \neq 90°$, $B \neq 90°$, akkor

$$(b^2+c^2-a^2)\mathrm{tg}A = (a^2+c^2-b^2)\mathrm{tg}B.$$

(55) Bármely háromszögben

$$a(b\cos B+c\cos C) = \sin A(b^2\mathrm{ctg}B+c^2\mathrm{ctg}C).$$

(56) Bármely háromszögben $h_a = 2R\sin B\sin C$ és analógjai.

(57) Bármely háromszögben $a^2\mathrm{ctg}A+b^2\mathrm{ctg}B+c^2\mathrm{ctg}C = 4T$.

(58) Ha $2h_a = a\cdot\mathrm{tg}B$, $B \neq 90°$, akkor az ABC háromszög egyenlő szárú.

(59) Ha $\mathrm{ctg}A+\mathrm{ctg}B = 2\mathrm{ctg}C$, akkor $a^2+b^2 = 2c^2$.

(60) Ha $\mathrm{ctg}A = 2(\mathrm{ctg}B+\mathrm{ctg}C)$, akkor $b^2+c^2 = 3a^2$.

(61) Ha $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C = 1$, akkor az ABC háromszög derékszögű.

(62) Ha $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C = 2$, akkor az ABC háromszög derékszögű.

(63) Ha $a^2+b^2+c^2 = 8R^2$, akkor az ABC háromszög derékszögű.

(64) Ha $b+c = 2a$, akkor $2\cos A+\cos B+\cos C = 2$.

(65) Ha $5a^2 = 5b^2+c^2$ és $3b^2 = 3c^2+a^2$, akkor $\mathrm{tg}A = 3$, $\mathrm{tg}B = 2$, $\mathrm{tg}C = 1$.

(66) Ha $\frac{\sin C}{\sin B}+\frac{\sin B}{\sin C} = 2\sin A$, akkor ABC egyenlő szárú

derékszögű háromszög.

(67) Ha $T = \frac{a^2+b^2}{4}$, akkor ABC egyenlő szárú derékszögű háromszög.

(68) Milyen tulajdonságú az a háromszög, amelyben
$$\cos A+\cos B+\cos C = 1 \ ?$$

(69) Ha $p = b\cos A+c\cos B+a\cos C$, akkor az ABC háromszög egyenlő oldalú.

ÚTMUTATÁSOK A FELADATOK MEGOLDÁSÁHOZ

(1) $T = \frac{c \cdot h_c}{2}$ és legyen $h_c := CD \perp AB$, akkor $h_c = b \cdot \sin A$.

(2) Legyen A' az A pont átmérősen ellentett pontja :
$$ADC\Delta \sim ABA'\Delta.$$

(3) Az (1) szerint $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{abc}{2T}$, majd (2)-t alkalmazzuk.

(4) Legyen $AA' \perp BC$ és felírjuk a koszinuszt az $ABA'\Delta$ és $ACA'\Delta$-ben.

(5) A (4) mindhárom változatát alkalmazzuk.

A továbbiakban a rövidítés céljából a szinusztétel Sz-tétel, koszinusztételt K-tétel néven emlegetjük. Amikor azt írjuk, így az Sz-tételt alkalmazzuk, akkor a $\sin A = \frac{a}{2R}$ és analógjait helyettesítjük be, amikor a K-tételt alkalmazzuk, akkor a $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ és analógjait helyettesítjük be.

(6)-(11) Alkalmazzuk az Sz-tételt a szinuszokra (tehát $\sin A = \frac{a}{2R}$ stb-t helyettesítünk be).

(12)-(19) A K-tételt alkalmazzuk, de a (19) a (4) mindhárom változatából összegezve is kijön.

(20) A K-tételt alkalmazzuk a B szögre az $ABM\ \Delta$ és $ABC\ \Delta$-ben.

(21) A (20) sajátos esete.

(22) A (20) sajátos esete, alkalmazva a szögfelező tételt is, ahonnan $BM = \frac{ac}{b+c}$ és $MC = \frac{ab}{b+c}$ beírható.

(23)-(25) A (21)-es oldalfelező-tételt és analógjait használjuk fel.

(26) $T = \frac{bc\sin A}{2}$, $\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A}$, a (21)-et és a K-tételt használjuk.

(27) A (22) alapján a $b^2+c^2 = a^2$-hez jutunk.

(28) $a \cdot h_a = bc\sin A$ majd a (22)-t alkalmazva $\sin^2 A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+1$ adódik és így $(1-\cos A)(1+\cos A) = 1+\cos A$ és a K-tétel alapján $A = 90°$.

(29),(31) A műveletek elvégzése után $a^2 = b^2+c^2-bc$ adódik, K-tételt alkalmazzuk.

(30) A műveletek után $b^2=a^2+c^2-ac$ ez analóg (29),(31)-gyel.

(32) $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ és $(b+c)^2 = (3+\sqrt{3})^2$ alapján $bc = 2+2\sqrt{3}$, majd (1)-et alkalmazzuk.

(33) $b^2+c^2 = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}a^2$ és $(b+c)^2 = \dfrac{4a^2}{3}$; kiszámítjuk bc-t és K-tételből $\cos A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(34) $\cos A-\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{(b-c\sqrt{3})^2}{4bc} \geq 0$ (A K-tételt és a feltevést alkalmazzuk).

(35) $\cos A = \dfrac{b^2+c^2}{4bc} \geq \dfrac{1}{2}$ (ugyancsak a K-tételt és a feltevést alkalmazzuk).

(36) $\cos A-\dfrac{1}{2} \geq \dfrac{3}{4}\dfrac{(b-c)^2}{2bc} \geq 0$ így $A < \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{A+B+C}{3}$.

(37) $A+B+C = 180°$ így $A = 60°$, a K-tételből $b\cdot c = a^2$ adódik, így b és c az $x^2-2ax+a^2 = 0$ egyenlet gyökei.

(38) K-tételt alkalmazzuk.

(39)-(43) A Sz-tételt alkalmazzuk.

(44) A szinuszokra a Sz-tételt alkalmazva a (48)-as feladatot kapjuk.

(45) Előbb a Sz-tételt alkalmazzuk, majd a K-tételt.

(46) Felírva $\mathrm{ctg}x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, előbb a Sz-tételt, majd a K-tételt alkalmazzuk.

(47) Az előbbihez hasonló módon járunk el, ezúttal a Sz-tételből az oldalakat írjuk be és így a (48)-hoz jutunk.

(48) $\dfrac{r}{R} = \dfrac{4T^2}{p\cdot abc} = \dfrac{4(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$. Elvégezzük a számításokat, majd a K-tételt alkalmazzuk.

(49) Nem más, mint a $T = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ún. Heron képlete. Behelyettesítjük a $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ értéket és rövidített számítási képleteket használunk.

(50) A (49)-be beírjuk a feltételt.

(51) $R = \dfrac{abc}{4T}$, beírjuk a K-tételt, majd (49)-et alkalmazzuk a T-re.

(52)-(54) Beírjuk $\mathrm{tg}x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, előbb a Sz-tételt, majd a K-tételt alkalmazzuk. Az (53)-nál még a $T = \dfrac{bc\sin A}{2}$-t is használjuk, az (54) az (53) analógjaiból tranzitivitással megkapható.

(55) A $\mathrm{ctg}x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ után előbb a Sz-tételt alkalmazzuk, ezúttal $\sin B = \dfrac{b}{a}\sin A$ és $\sin C = \dfrac{c}{a}\sin A$ formában, azután a K-tételt.

(56) $a \cdot h_a = 2T$, $R = \dfrac{abc}{4T}$ így $T^2 = \dfrac{a^2bc\sin B\sin C}{4}$, majd (1)-et és analógjait alkalmazzuk.

(57) A Sz-tételből beírjuk a szinuszokat, és visszajutunk az (51)-hez.

(58) $a \cdot h_a = ac\sin B$, majd a K-tételt alkalmazzuk.

(59)-(60) Felírjuk a $\text{ctg}x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ képletet, előbb a Sz-tételt, utána a K-tételt alkalmazzuk.

(61) A $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ alapképlettel átírható a (62)-re.

(62) A Sz-tétellel átírható a (63)-ra.

(63) Beírjuk: $R = \dfrac{abc}{4T}$, így $T^2 = \dfrac{a^2b^2c^2}{2(a^2+b^2+c^2)}$ adódik, majd

a $T = \dfrac{bc\sin A}{2}$ alapján $\sin^2 A = \dfrac{2a^2}{a^2+b^2+c^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2 A = 1 - \sin^2 A$, másfelől $\cos^2 A = \left(\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2$ és

végül $(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2) = 0$ adódik.

(64) $\cos B + \cos C = \dfrac{a^2(b+c)+bc(b+c)-(b+c)(b^2-bc+c^2)}{2abc}$, beírjuk a $b+c = 2a$ feltételt, majd $2(1-\cos A)$ esetén is a K-tételt alkalmazzuk.

(65) $b^2 = \dfrac{8}{9}a^2$, $c^2 = \dfrac{5}{9}a^2 \Rightarrow b = \dfrac{2\sqrt{2}a}{3}$, $c = \dfrac{a\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \cos A =$

$= \dfrac{1}{\sqrt{10}}$ (a K-tétel alapján) majd $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = \dfrac{9}{10}$,

$\text{tg}A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$; hasonlóan a többi is.

(66) A Sz-tétel segítségével $\sin A = \dfrac{b^2+c^2}{2bc}$ adódik, a K-tételből $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ és $\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [a^2-(b^2+c^2)]^2 + (b^2-c^2)^2 = 0$.

(67) $T = \dfrac{ab\sin C}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{4}(a^2+b^2) = \dfrac{ab\sin C}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a-b)^2 + 2ab(1-\cos C) = 0$.

(68) A K-tételt alkalmazva:

$$\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}-1\right)+\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}-1\right)+\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}-1\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \dfrac{(a+b-c)(a+c-b)(c+b-a)}{2abc} = 0$ adódik, ami egyetlen háromszögben sem teljesülhet.

(69) A K-tételt alkalmazva $(b-a)(c-b)(c-a)(a+b+c) = 0$ adódik.