Ismétlés nélküli kombináció

Hányféleképpen lehet *n* különböző elemből kiválasztani *k* elemet úgy, hogy a sorrend nem számít, és minden elemet csak egyszer választhatunk?

0. Egy 14 fős csoportban hányféleképpen lehet 5 egyforma könyvet kiosztani, ha mindenki 1 könyvet kaphat?

Az első könyvet 14 tanulónak adhatjuk. A második könyvet a maradék 13 tanulónak adhatjuk. És így tovább…

hely	1.	2.	3.	4.	5.
lehetőség	14	13	12	11	10

Összesen 14·13·12·11·10 – féleképpen oszthatjuk ki a könyveket, úgy hogy a sorrend számít.

Másképpen: $\frac{14!}{(14-5)!}$ **eset lehetséges.**

Igen ám, de egyformák a könyvek. A kiválasztott 5 tanulót akárhogy állítjuk sorba, ugyanazt az esetet kapjuk, mert ugyanaz a könyv lesz náluk. Az esetek száma annyiadrészre csökken, ahányféleképpen a kiválasztott öt tanulót sorba tudjuk rendezni.

Így a lehetőségek száma: $\frac{\frac{14!}{(14-5)!}}{5!} = \frac{14!}{(14-5)!\cdot 5!}$

Hogy ne kelljen annyit írni, ezt a törtet úgy jelöljük, hogy $C_{14}^{5} = \binom{14}{5}$

/olvasd. 14 alatt az öt/ és binominális együtthatónak nevezzük.

Általánosan: $C_n^k = \binom{n}{k}$ **(olvasd n alatt a k).**

Általános képlet

***n* különböző elemből** $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ **- féleképpen lehet kiválasztani *k* elemet úgy, hogy a sorrend nem számít, és minden elemet csak egyszer választhatunk.**

1. Hány lottószelvényt kell kitölteni, hogy 5 találatosunk legyen?

Az ötös lottón az 1, 2,… , 90 számok közül kell kiválasztani 5 számot úgy, hogy a sorrend mindegy.

Ezt $C_{90}^{5} = 43\,949\,268$ **- félképpen tehetjük meg.**

Tehát a biztos ötös találathoz majdnem 44 millió szelvényt kéne kitölteni. Nem túl gazdaságos. Számold ki mennyibe kerülne!
A hatos lottón 1, 2,… , 45 számok közül kell 6 számot úgy, hogy a sorrend mindegy.

Ezt $C_{45}^{6}=8\,145\,060$ - félképpen tehetjük meg. Itt kevesebb szelvényt kell kitölteni, de kevesebbet is fizet.

2. Egy kalapban van 20 különböző színű golyó. Belemarkolunk a kalapba és kiveszünk ötöt. Ezt hányféleképpen tehetjük meg?

A kiválasztott öt golyó sorrendje nem számít, ezért $C_{20}^{5}=15\,504$ vehetünk ki öt golyót.

3. Egy műhelyben egy műszak alatt elkészített 500 darab zár között 4% selejtes. Hányféleképpen lehet közülük kiválasztani 10 zárat úgy, hogy
- **a.) mind a 10 selejtes legyen,**
- **b.) 5 selejtes legyen?**

500·0,04 = 20 ⇒20 zár selejt és 480 zár jó. A zárak egyformák ezért a kiválasztott elemek sorrendje nem számít.

a.) A 20 selejtből kell választani mind a tizet. A lehetőségek száma:

$$C_{20}^{10}=184\,756$$

b.) Ötöt a <u>selejtekből</u> kell választani, ez $C_{20}^{5}=15\,504$ féleképpen lehetséges.

Ötöt a <u>jókból</u> kell választani, ez C_{480}^{5} - féleképpen lehetséges.

Bármelyik 5 jó mellé bármelyik öt rosszat párosíthatjuk, az lehetséges kiválasztások száma:

$$C_{20}^{5}\cdot C_{480}^{5}$$

4. Egy csomag magyar kártyából húzzunk ki találomra 7 lapot. Hány esetben lehet a kihúzott lapok között 1 király?

A kihúzott lapok sorrendje mindegy. Az a lényeges, hogy milyen lapokat kapunk, a sorrendjük nem számít a kezünkben.

A 4 királyból egyet $C_{4}^{1}=4$ - féleképpen választhatunk.

Kell még 6 nem király. A 28 nem királyból hatot $C_{28}^{6}=376\,740$ - féleképpen választhatunk. Bármelyik királyt bármelyik hat nem királlyal összepárosíthatjuk ezért az összes lehetőségek számát az egyes lehetőségek számának a szorzata adja:

$$\underbrace{C_{4}^{1}\cdot C_{28}^{6}=\binom{4}{1}}_{\text{4 királyból egy}}\cdot\underbrace{\binom{28}{6}}_{\text{a 28 nem királyból 6}}=1\,506\,960$$

5. A buszjegy kezelő automata a jegyet 9 pontban lyukasztja ki. Hányféle érvényesítés lehetséges, ha az automata legalább 1 és legfeljebb 9 helyen lyukaszt?

$$C_{9}^{1}+C_{9}^{2}+\ldots+C_{9}^{9}=2^{9}-1=511$$

6. Egy önkiszolgáló étterem pultján 6 különböző leves és 9 különböző főzelék áll. Hányféle lehet egy 4 fős társaság együttes fogyasztása, ha mindenki eszik levest is és főzeléket is?

$C_6^4 \cdot C_9^4 = 1890$

7. Egy hallgatónak 20 egykötetes regénye és 8 verseskötete van. Magával akar vinni 5 kötetet. Hányféleképpen teheti ezt meg, ha a kiválasztottak közt versesköteteknek is kell lennie?

$C_{28}^5 - C_{20}^5 = 8276$ **(Összes lehetőség- csak regény választás).**

8. Hány különböző összeg fizethető ki egy-egy darab 1, 2, 5, 10 illetve 20 Ft-ossal?

$C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 2^5 - 1 = 31$ **ugyanis egyik pénzérme sem állítható elő a többi felhasználásával, tehát minden kiválasztás más-más összeg.**

9. Egy 20 fős üdülő társaság 5 fős turnusokban ebédel. Hányféleképpen lehetséges ez?

$$C_{20}^5 \cdot C_{15}^5 \cdot C_{10}^5 \cdot C_5^5 = \frac{20!}{(5!)^4}$$

10. Hány átlója van egy szabályos 12 oldalú sokszögnek?

A 12 db hármanként nem kollineáris pontból 2-2-t választva „meghúzzuk" az összes lehetséges egyenest. Ezek között a sokszög oldalai is ott lesznek, tehát ezeket levonjuk. Azért van szó kombinációról, mert a két kiválasztott pont sorrendje nem számít (nem számít, hogy „oda, vagy vissza húzzuk" az egyenest).

$C_{12}^2 = \frac{V_{12}^2}{P_2} = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66$ **66 – 12 = 54 (db átló)**

11. Egy polcon 15 üveg bor van: 10 fehér és 5 vörös. Hányféle módon lehet kiválasztani ezek közül 6 üveggel, hogy közötte 2 üveg vörös bor legyen?

$C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10 \quad (\textit{vörös bor})$ $C_{10}^4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210 \quad (\textit{fehér bor})$

Tehát $C_5^2 \cdot C_{10}^4 = 210 \cdot 10 = 2100$ *féleképpen.*

12. Egy 32-es létszámú osztályban létre kell hozni egy 5 tagú bizottságot, amelyben legyen 1 titkár, a másik 4 csak tag. Hány olyan eset van, amikor Kovács Éva:

a.) titkára a bizottságnak?
b.) nem titkár, de tag a bizottságban?
c.) szerepel a bizottságban?

a.)Ha Kovács Éva a titkár, akkor a maradék 31 tanulóból választunk 4 helyre:

$C_{31}^4 = \frac{31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 31\,465$.

b.)Valaki titkár lesz, Kovács Éva tag.
A titkár helyére 31 féle választás van.

A 3 tag helyére C_{30}^{3} (3 helyre választunk, mert a titkárt már kiválasztottuk és Kovács Éva is elfoglalt egy helyet.)

Tehát Ö = 31·$C_{30}^{3} = 31\cdot\frac{30\cdot 29\cdot 28}{3\cdot 2\cdot 1} = 31\cdot 5\cdot 29\cdot 28 = 125\,860$.

c.)Az előző kettőből következik, hogy C_{31}^{4} + 31·C_{30}^{3} = 157 325.

13. Egy osztályból 17 fiú 2 napos túrára megy. Éjszakára a turistaházban 1 darab 8 ágyas, 1 darab 4 ágyas, 1 darab 3 ágyas és 1 darab 2 ágyas szobában kapnak szállást. Hányféleképpen helyezkedhetnek el a szobákban, ha az egy szobában lévő fekvőhelyek között nem teszünk különbséget?

Mivel a fekhelyeket nem különböztetjük meg, a sorrend nem számít.

8 ágyas szobába a 17 fiúból sorsolunk ki nyolcat: ez C_{17}^{8} -féleképpen lehetséges.

4 ágyas szobába a maradék 9 fiúból sorsolunk ki négyet: ez C_{9}^{4} -féleképpen lehetséges.

3 ágyas szobába a maradék 5 fiúból sorsolunk ki hármat: ez C_{5}^{3} -féleképpen lehetséges.

2 ágyas szobába a maradék két fiú megy: egyféleképpen lehetséges.

Az összes esetek száma: $C_{17}^{8}\cdot C_{9}^{4}\cdot C_{5}^{3}\cdot C_{2}^{2}$

14. Egy csomag magyar kártyából kihúzunk 10 lapot. Hány esetben lesz a kihúzott lapok között
a) legalább 7 zöld; b) legfeljebb 7zöld?

a.) Legalább 7 zöld van a lapok között, ha 7 vagy 8 zöld lapot húztunk.

<u>8 zöld van a lapok között:</u> Kell a 8 zöldből 8, ez $C_{8}^{8} = 1$-féleképpen lehetséges.

Kell a 24 nem zöldből 2, ez C_{24}^{2} -féleképpen lehetséges.

Tehát 8 zöld $C_{8}^{8}\cdot C_{24}^{8}$ -féleképpen lehet a 10 lap között.

<u>7 zöld van a lapok között:</u> Kell a 8 zöldből 7, ez C_{8}^{7} -féleképpen lehetséges.

Kell a 24 nem zöldből 3, ez C_{24}^{3} -féleképpen lehetséges.

Bármelyik 7 zöld lapot bármelyik három nem zöld lappal párosíthatjuk, ezért 7 zöld $C_{8}^{7}C_{24}^{3}$ -féleképpen lehet a 10 lap között.

Legalább 7 zöld összesen $C_{8}^{8}\cdot C_{24}^{2} + C_{8}^{7}\cdot C_{24}^{3}$ esetben lehet a lapok között.

b.) Legfeljebb 7 zöld van a tíz lap között.
Csak az az eset kedvezőtlen, ha 8 zöld lapot húztunk.

Ha kevés a kedvezőtlen eset, akkor könnyebb úgy számolni, hogy a kedvező esetek számából kivonjuk a kedvezőtlen esetek számát.

Összes lehetőség: C_{32}^{10}

Kedvezőtlen esetek száma (8 zöldet húztunk): $C_{8}^{8}\cdot C_{24}^{2}$

Kedvező esetek száma: $C_{32}^{10} - C_{8}^{8}\cdot C_{24}^{2}$

15. 500 játékkockából 40 selejt. Ha az ötszáz kockából kiveszünk 20-t, akkor hány esetben lesz köztük

a.) legalább 2 selejt; b.) legfeljebb 2 selejt?

a.) Összes esetek száma: C_{500}^{20}

Kedvezőtlen eset: nincs selejt vagy ha 1 selejt van. $C_{460}^{20}+C_{460}^{19}\cdot C_{40}^{1}$

Kedvező esetek száma: $C_{500}^{20}-\left(C_{460}^{20}+C_{460}^{19}\cdot C_{40}^{1}\right)$

b.) Kedvező eset ha 0; 1; 2 selejt van.

$$C_{460}^{20}+C_{460}^{19}\cdot C_{4}^{1}+C_{460}^{18}\cdot C_{4}^{2}$$

16. A síkban adott n pont, ahol k pont ugyanazon az egyenesen helyezkedik el, a többi viszont hármanként nem kollineáris.
a) Hány egyenessel kötjük össze ezeket a pontokat?
b) Hány különböző háromszög csúcsait helyezhetjük el ezeken a pontokban?

a) $C_{n}^{2}-C_{k}^{2}+1$ b) $C_{n}^{3}-C_{k}^{3}$

17. Egy társaságban mindenki mindenkivel kezet fogott. Összesen 66 kézfogás történt. Hányan voltak a társaságban?

Megoldás: $C_{n}^{2}=\frac{n(n-1)}{2}=66$ ahonnan n= 12

18. Hányféleképpen olvashatjuk ki a MICIMACKÓ szót a következő táblázatból?

M	I	C	I	M	A
I	C	I	M	A	C
C	I	M	A	C	K
I	M	A	C	K	Ó

A bal felső sarokból a jobb alsó sarok felé kell haladnunk, csak jobbra vagy lefelé léphetünk.

Összesen 5-öt kell lépni jobbra és 3-at kell lépni lefelé, ez összesen 8 hely .

1. megoldás:
Nyolc hely van. Ebből ki kell választani hármat, úgy hogy a sorrend mindegy és ezekre a helyekre írjuk az l betűket, a többi helyre a j betűket.
Ezt $C_{8}^{3}=56$-féleképpen tehetjük meg.

pl. a JJJLLJLJ sorozat annak felel meg, hogy jobbra, jobbra, jobbra, le, le, jobbra, le, jobbra

M	I	C	I	M	A
I	C	I	M	A	C
C	I	M	A	C	K
I	M	A	C	K	Ó

2. megoldás:
Nyolc hely van. Ebből ki kell választani hármat, úgy hogy a sorrend mindegy és ezekre a helyekre írjuk a j betűket, a többi helyre az l betűket.

Ezt $C_8^5 = 56$-féleképpen tehetjük meg.

3. megoldás: Annyi útvonal van, amennyiszer sorba lehet rendezni 5 J és 3 L betűt: $P_8^{3,5} = \dfrac{8!}{3!\cdot 5!} = 56$

4. Megoldás: rekurzív számlálással

M	I^1	C^1	I^1	M^1	A^1
I^1	C^2	I^3	M^4	A^5	C^6
C^1	I^3	M^6	A^{10}	C^{15}	K^{21}
I^1	M^4	A^{10}	C^{20}	K^{35}	$Ó^{56}$

Megjegyzés: $P_n^{k,n-k} = \dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = C_n^k$

19. Egy csomag 52 lapos franciakártya-csomagból 10 lapot húzunk ki. Hány esetben lesz ezek között:
a) király b) pontosan 1 király c) legalább 2 király d) pontosan 2 király?

Az 52 lap közül 10 lapot C_{52}^{10}-féleképpen húzunk ki. Mivel a csomagban 4 király van, ezért C_{48}^{10} esetben NEM húzunk királyt.

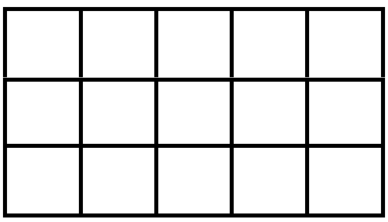
a) legalább 1 királyt: $C_{52}^{10} - C_{48}^{10}$

b) pontosan egy királyt: $C_{48}^{9} \cdot C_4^1$

c) legalább két királyt: $C_{52}^{10} - C_{48}^{10} - C_{48}^{9} \cdot C_4^1$

d) d) pontosan 2 királyt akkor húzunk ki, ha a 4 király közül választunk ki kettőt, a többi nyolc lapot pedig a maradék 48 lapból, tehát: $C_{48}^{8} \cdot C_4^2$

20. Hány téglalap alakítható ki az ábrán levő 15 egységnyi területű téglalapból, ha a rácspontok lehetnek a téglalap csúcsai?



$C_6^2 \cdot C_4^2 = 15 \cdot 6 = 90$ mert egy téglalapot 4 csúcs határoz meg, a vízszintes 6 pont közül 2-öt C_6^2-féleképpen, a függőleges 4 pont közül 2-öt C_4^2-féleképpen választhatunk ki, a megoldás a kettjük szorzata.