Ismétlés nélküli permutáció

Hányféleképpen lehet sorba rendezni *n* különböző elemet úgy, hogy a sorrend számít?
(Ezt *n* elem ismétlés nélküli permutációjának nevezzük.)

Például hány féleképpen lehet sorba rendezni a TEA szó betűit?

TEA
TAE
AET $\Rightarrow$ 6 db
EAT
ATE
ETA

hely	1. hely	2. hely	3. hely
lehetőség	3	2	1

Az első helyre három, a második helyre a maradék kettő betűből választhatunk. A harmadik helyre csak egy betű maradt.
Ha kiválasztottuk az első betűt, akkor a másik két helyre a maradék betűket akármilyen sorrendben mögé írhatjuk.
Az esetek számát a lehetőségek szorzata adja: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$ **(3 faktoriális)**

Az első n pozitív egész szám szorzatát faktoriálisként rövidítjük.
n! := 1·2·3·… ·(n – 1)·n

hely	1. hely	2. hely	3. hely	…	n. hely
lehetőség	n	n –1	n – 2		1

***n* különböző elemet *n* faktoriális-féleképpen lehet sorba rendezni:** $P_n = n!$

Feladatok

1. Öt tanuló érkezik egyszerre a büféhez. Hányféleképpen állhatnak sorba?

Az első helyre öt tanulóból választhatunk, a második helyre 4 tanulóból, stb.:

hely	1. hely	2. hely	3. hely	4. hely	5. hely
lehetőség	5	4	3	2	1

A tanulók 5·4·3·2·1 =120 féleképpen állhatnak sorba.

2. Az országos nagyotmondó bajnokság döntőjébe hat csapat jutott be.
a.) Hányféle sorrend alakulhat ki?
b.) Hány olyan sorrend alakulhat ki, ahol a Mániákus Igazmondóké az első hely?

a.) 6! = 720-féle sorrend lehetséges.

b.) Az első helyezettet egyféleképpen választhatjuk ki. A többi öt csapatot 5! féleképpen rendezhetjük sorba mögötte.
A sorrendek száma $1\cdot 5!$

3. A 0, 1, 2, 3, … ,9 számokat sorozatba rendezzük. Hány esetben lehet, hogy az 1, 2, 3 számok növekvő sorrendben kerülnek egymás mellé?

Ha sorozatba rendezzük a számokat, akkor az első helyen lehet 0 is. Ha tízjegyű számokat keresnénk, akkor az első helyen nem lehetne 0.

0; 123; 4; 5; 6; 7; 8; 9
↓
Egy elemet képezek, 8-an vannak ⇒ 8! sorrend lehetséges.

Másik megoldás:

Írjuk rá a számokat papírlapokra! Az 1-t, a 2-t és a hármat egy papírlapra írjuk növekedő sorrendben. Annyi eset van, ahányféleképpen az alábbi lapokat sorba lehet rendezni.

0	123	4	5	6	7	8	9

8 lap van ⇒ 8! sorrend lehetséges.

4. Az iskolában rendezett versmondó verseny döntőjébe 10 tanuló került: Béla, Cecília, Erzsébet, Ferenc, Ilona, Jolán, Kálmán, Lívia, Mária és Péter.
a.) Hányféleképpen alakulhat a sorrend a helyezések szempontjából?
b.) Hány esetben lehet fiú az első helyezett?

a.) 10 embert 10! féleképpen lehet sorbarendezni.
b.) Az első helyre négy fiúból választhatunk. A második helyre a maradék 9 emberből választhatunk, és így tovább.

hely	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
lehetőség	4	9	8	7	6	5	4	3	2	1

$4\cdot 9\cdot 8\cdot \ldots \cdot 2\cdot 1 = 4\cdot 9!$ sorrend lehetséges.

5. Egy baráti kör tagjai közül 6 lány és 5 fiú együtt megy színházba. A jegyek egymás mellé szólnak.
a.) Hányféleképpen ülhetnek le?
b.) Hányféleképpen foglalhatnak helyet, ha lány lány mellé, és fiú fiú mellé nem ülhet?

a.) 11 hely $\Rightarrow 11!$ sorrend lehetséges.
b.) Mivel eggyel több a lány, egyneműek akkor nem kerülhetnek egymás mellé, ha a két szélen lányok ülnek.

hely	L_1	F_1	L_2	F_2	L_3	F_3	L_4	F_4	L_5	F_5	L_6
lehetőség	6	5	5	4	4	3	3	2	2	1	1

A lányokat a saját helyükre 6!, a fiúkat a saját helyükre 5! féleképpen ültethetjük le. Mivel bármelyik lány hatost bármelyik fiú ötössel párosíthatjuk a lehetőségek száma: 6!·5!

6. 5 házaspár foglal helyet egy padon. Hányféleképpen helyezkedhetnek el, ha a házaspárok egymás mellett akarnak ülni?

F	N		F	N		F	N		F	N		F	N		F	N

Írjuk fel a házaspárok nevét papírlapokra az ábrának megfelelően! Öt kártyát 5! féleképpen rendezetünk sorba. Ha valamelyik lapon felcseréljük apucit és anyucit, akkor is a feltételeknek megfelelő sorrendet kapunk. Minden ilyen csere megduplázza a lehetőségek számát!

Összesen $2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot5! = 2^5\cdot5!$ helyfoglalás lehetséges.

7. 5 házaspár foglal helyet egy padon. Hányféleképpen helyezkedhetnek el, ha a házastársak egymás mellett akarnak ülni, de sem két nő, sem két férfi nem ülhet egymás mellé?

Írjuk fel a házaspárok nevét papírlapokra az ábrának megfelelően! Öt kártyát 5! féleképpen rendezetünk sorba. Ha mindegyik lapon felcseréljük apucit és anyucit, akkor is a feltételeknek megfelelő sorrendet kapunk.

F	N		F	N		F	N		F	N		F	N
N	F		N	F		N	F		N	F		N	F

Összesen $2\cdot5! = 2\cdot5!$ helyfoglalás lehetséges.

8. Hány 6-tal osztható tízjegyű számot készíthetünk a 0, 1, 2, …, 9 számjegyekből, ha minden számjegyet csak egyszer írunk fel?

Egy szám akkor osztható hattal, ha 2-vel és 3-mal is osztható.

$$3 \mid 1+2+\ldots+9=45$$

A megadott számok összege osztható hárommal, azért az összes ilyen tízjegyű szám osztható hárommal. Ha páros, akkor hattal is osztható. Tehát közülük azok oszthatók hattal, amelyek párosak, azaz 0, 2, 4, 6, 8-ra végződnek.

hely	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10. 0 van
lehetőség	9	8	7	6	5	4	3	2	1	1

0-ra végződőekből 1·9! szám van.

Ha a végén 2 van, akkor az első helyre 8 elemből választhatunk, mert szám nem kezdődhet 0-val.

$\cancel{0}$, 1, $\cancel{2}$, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

hely	1. 0 nem	2. 0 is								10. 2 van
lehetőség	8	8	7	6	5	4	3	2	1	1

Ha a végén 4, 6 vagy 8 van, akkor ugyanennyi eset létezik.

Összesen $4 \cdot 8 \cdot 8! + 9!$ ilyenszámot készíthetünk.

9. Hány olyan hatjegyű szám van, amelyik 5-tel osztható?

Az első helyre 9 számjegyet tehetünk, mert a 0 nem kerülhet a szám elejére. Az utolsó helyre a 0 és az 5-ös kerülhetnek. A közbülső négy hely mindegyikére a 10 számjegy bármelyike kerülhet. Ezek a választások egymástól függetlenek, tehát az összes lehetőség számát megkapjuk, ha az egyenkénti lehetőségeket összeszorozzuk:

$$9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 2 = 180\,000$$

10. Képezzük az összes olyan hatjegyű számot, amelyikben az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyek mindegyike szerepel. Mekkora az így nyert hatjegyű számok összege?

1. megoldás

Írjuk fel képzeletben az összes ilyen számot egymás alá. Egy adott oszlopban pl. az 1-es 5! alkalommal szerepel (ahányféleképpen a többi 5 helyre a többi 5 elemet el lehet helyezni). Tehát ebben az oszlopban az 1-esek összege 5! × 1: Hasonlóan a 2-esek összege 5! × 2: Az összes szám összege ebben az oszlopban 5! × (1+2+3+4+5+6). Ez azonban mindegyik oszlopra igaz, így a helyi értéket is figyelembe véve az összes oszlop összege

$$5! \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) \times (1 + 10 + 100 + 1\,000 + 10\,000 + 100\,000) =$$
$$= 5! \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) \times 111\,111 = 120 \times 21 \times 111\,111 = 279\,999\,720$$

2. megoldás

Nézzük a következő összeget: 123 456+ 654 321= 777 777:
Ehhez hasonlóan a többi számot is tudjuk párosítani úgy, hogy két-két szám összege 777 777 legyen. Mivel 6! szám van, a párok száma 6!/2 ; a párok összege pedig 6!/2× 777 777 = 279 999 720.

11. A 0, 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekkel képezzük az összes hatjegyű számot (nincs számjegy ismétlés).
a) Hány hatjegyű számot kapunk **6!-5!=600**
b) Hány szám kezdődik 1-el? **5!=120**
c) Hány szám végződik 1-ben? **5!-4!=96**
d) Hány szám kezdődik 10-el? **4!=24**
e) Hány szám nem kezdődik 10-el? **600-24=576**

12. 10 riporter között 3 sportriporter van. Hányféleképpen lehet a riportereket 10 helyszínre kiküldeni, ha 3 helyszínen sportrendezvény van, s mindhárom sporthelyszínre sportriportereket akarunk küldeni?

Megoldás: 3!×7!

13. Hányféle sorrendben helyezhetünk el a polcon 8 könyvet, ha egy két- illetve egy háromkötetes regény kötetei csak egymás mellett állhatnak?

Megoldás: 5!×2!×3!

14. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekkel hány olyan hatjegyű szám képezhető, amelyben az utolsó két számjegy összege 6-nál kisebb?

Megoldás: 4×5!×2! (az utolsó két számjegy 1 és 2, vagy 1 és 3, vagy 1 és 4, vagy 2 és 3)

15. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekkel hány olyan hatjegyű szám képezhető amelyik:
a) osztható 3-mal b) osztható 9-cel c) páros d) páratlan
e) osztható 5-tel f) osztható 25-tel g) 56-tal kezdődik h) a 4-es és a 2-es egymás mellett vannak i) a 2-es és az 5-ös alapsorrendbeli helyén áll j) a 2-es és a hármas nincs egymás mellett

a) 6!=720 b) 0 c) 3×5! d) 3×5! e) 5!= 120 f) 4!= 24
g) 4!= 24 h) 2×5!=240 i) 4!= 24 j) 6!- 2×5!= 480

16. A 0, 1, 2, 3, 4, 5 számjegyeket pontosan egyszer felhasználva hány
a) tetszőleges b) valódi 7-jegyű c) páros d) páratlan
e) tízzel osztható f) öttel osztható g) öttel kezdődő h) 56-tal kezdődő
i) 56-ra végződő j) a 3 a közepén, tőle jobbra és balra egyenlő összegű számjegyeket tartalmazó számot képezhetünk? (a c) – j) esetekben is valódi hátjegyű számokat kell adni!)

a) 7!= 5040 b) 7!- 6!= 4320 c) 6!+3×(6!- 5!)= 2520 d) 3×(6!- 5!)= 1800
e) 6!= 720 f) 6!+(6!– 5!)= 1320 g) 6!= 720 h) 5!= 120
i) 5!- 4!= 96 j) 3!×3!+3!(3!-2!)=60

Ciklikus permutációk:

1. Hányféleképpen ültethető a kör alakú asztal köré n lovag?

Először állítsuk sorba a lovagokat. Ezt n! - féle képpen tudjuk megtenni, majd ültessük le őket a kerekasztalhoz. Az ültetés után nem tudjuk megmondani, hol volt a sor vége, sőt: ha az ültetés alapján akarjuk sorba állítani a lovagokat, akkor pontosan n - féleképpen jelölhetjük ki – immár önkéntesen – a sor kezdetét és végét. Így n olyan egyenes sor van, ami ugyanahhoz a kör alakú elrendezéshez vezet. A lehetőségek száma ezért az előző feladat eredményének n - edrésze, azaz (n – 1)!.

2. Hányféleképpen fűzhető fel n különböző színű gyöngy egy láncra, ha a kék és a fehér gyöngynek egymás mellé kell kerülnie?

Ebben az esetben a tükrözést már eleve külön esetként kezeltük, így a párok egymás közötti sorrendje már nem számít. Ezért (n – 2)! sorrend lehetséges.

3. Hányféleképpen ültethető a kör alakú asztal köré n lovag, ha
a) Sir Lancelot és King Arthur egymás mellé kell hogy kerüljenek,
b) Sir Gaweyn és Sir Galahad illetve Sir Lancelot és Arthur király egymás mellé kell, hogy kerüljenek?

a) Az egymás mellé teendő párokat egyként kezeljük.
n – 1 pár (n – 2)! - féleképpen ülheti körbe az asztalt, de a párok egymás közötti sorrendje számít, ezért a lehetőségek száma:
2(n – 2)!
b) 2^2(n – 3)!.

4. Csenge vacsorára hívta 7 barátját. Hányféleképpen ültetheti le őket a kör alakú asztalhoz, ha Réka Csenge mellett szeretne ülni?

Csengét és Rékát egy egységként kezeljük. Hat elemet 5! módon lehet körbe rendezni. Minden egyes esetben felcserélhetjük Csengét és Rékát. A lehetőségek száma: 2·5!

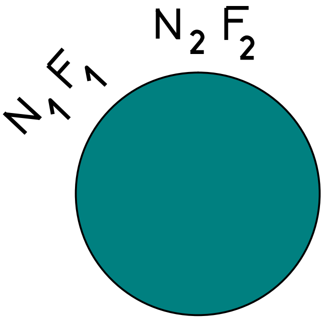
5. 4 házaspár hányféleképpen ülhet le egy kör alakú asztalhoz vacsorázni, ha a párok egymás mellett szeretnének ülni?

A 4 házaspár 4 egységet alkot. 4 egységet 3! – féleképpen rendezhetünk el kör alakban. Mindegyik elrendezésben felcserélhetjük az egyik pár férfi és nő tagját, ami megduplázza az esetek számát. Ezt mind a 4 párral megtehetjük, ezért az esetek száma 2×2×2×2×3!.

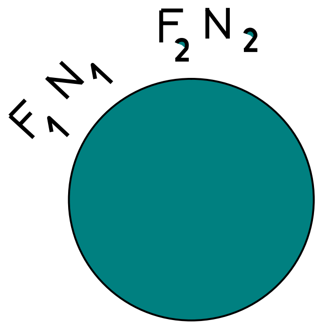
5a. n házaspár foglal helyet egy kör alakú asztalnál. Hányféleképpen helyezkedhetnek el, ha a házastársak egymás mellett akarnak ülni? (Két elhelyezést akkor és csak akkor tekintünk különbözőnek, ha a társaságban legalább egy embernek legalább az egyik szomszédja a két elhelyezkedésben különböző.)

Az n házaspár n egységet alkot. n egységet (n – 1)!-féleképpen rendezhetünk el kör alakban. Mindegyik elrendezésben felcserélhetjük az egyik pár férfi és nő tagját, ami megduplázza az esetek számát. Ezt mind az n párral megtehetjük, ezért az esetek száma $2^n \cdot (n-1)!$.

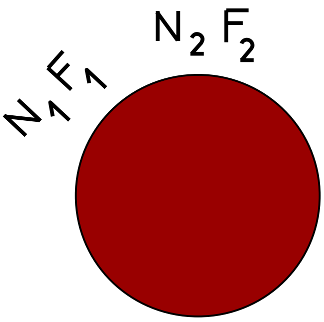
6. 4 házaspár hányféleképpen ülhet le egy kör alakú asztalhoz vacsorázni, ha a párok egymás mellett szeretnének ülni, de úgy, hogy egyneműek ne kerüljenek egymás mellé?



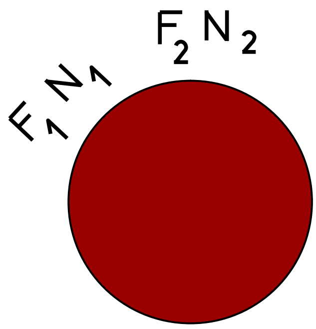
Az 4 házaspár 4 egységet alkot. 4 egységet 3! – féle képpen rendezhetünk el kör alakban. Csak az ábráknak megfelelő elrendezés lehetséges ezért a lehetőségek száma 2·3!



6a. n házaspár foglal helyet egy kör alakú asztalnál. Hányféleképpen helyezkedhetnek el, ha a házastársak egymás mellett akarnak ülni, de sem két férfi, sem két nő nem ülhet egymás mellé? (Két elhelyezést akkor és csak akkor tekintünk különbözőnek, ha a társaságban legalább egy embernek legalább az egyik szomszédja a két elhelyezkedésben különböző.)



Az n házaspár n egységet alkot. Az n egységet (n – 1)!- féleképpen rendezhetünk el kör alakban. Csak az ábráknak megfelelő elrendezés lehetséges ezért a lehetőségek száma 2·(n – 1)!



7. Hányféleképpen lehet leültetni egy kerek asztal köré 8 embert úgy, hogy két haragos ne kerüljön egymás mellé?

Megoldás: 7!- 2×6!= 3600

8. Hányféleképpen lehet leültetni egy kerek asztal köré 4 férfit és 4 nőt úgy, hogy sem két azonos nemű, sem két különböző nemű haragos ne kerüljön egymás mellé?

Megoldás: 4!×3!- 2×3!×3!= 72