Ismétlés nélküli variáció

Hányféleképpen lehet kiválasztani *n* különböző elemből *k* különböző elemet úgy, hogy a sorrend számít, és minden elemet csak egyszer választhatunk?

0. Egy 14 fős csoportban hányféleképpen lehet 5 különböző könyvet kiosztani, ha mindenki 1 könyvet kaphat?

Az első könyvet 14 tanulónak adhatjuk. A második könyvet a maradék 13 tanulónak adhatjuk. És így tovább…

hely	1.	2.	3.	4.	5.
lehetőség	14	13	12	11	10

Összesen 14·13·12·11·10 – féleképpen oszthatjuk ki a könyveket.

$$14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10=\frac{14\cdot13\cdot\ldots\cdot10\cdot\cancel{9\cdot\ldots\cdot2\cdot1}}{\cancel{9\cdot8\cdot\ldots\cdot2\cdot1}}=\frac{14!}{9!}=\frac{14!}{(14-5)!}$$

Általános bizonyítás

hely	1.	2.	3.		k.
lehetőség	n	n – 1	n – 2	…	n – (k–1) = n – k +1

$$n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))=\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))\cdot\cancel{(n-k)\cdot\ldots\cdot1}}{\cancel{(n-k)\cdot\ldots\cdot1}}=\frac{n!}{(n-k)!}$$

***n* különböző elemből *k* különböző elemet $V_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}$ - féleképpen lehet kiválasztani úgy, hogy a sorrend számít.**

1. Úszóversenyen 8 versenyző indul, az első három helyezettet éremmel fogják díjazni. Ha mindenki egyformán esélyes, akkor hányféle módon lehetséges az első három érem kiosztása?

Ennél a feladatnál 8 elem harmadosztályú variációját kell meghatározni. Az első helyezett a 8 versenyző bármelyike lehet, ez nyolc lehetőség. A második a többi 7 versenyző közül kerül ki, a harmadik helyre a kimaradt 6 ember közül bármelyik ember kerülhet, így az összes lehetőségek száma $V_8^3=8\cdot7\cdot6=336$.

2. Hány olyan négyjegyű szám van, amely különböző számjegyekből áll?

Ha úgy választunk ki 4 számot a 10 elemből álló halmazból, hogy a sorrend is számít, akkor a 10 elem negyedosztályú variációját kapjuk:

$$V_{10}^4 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$$

Ezután kiszámítjuk azoknak a számát, melyek nullával kezdődnek. Mivel az első helyen nem állhat a nulla, e számokat úgy kapjuk meg, hogy a maradék három helyre 9 számjegy közül választunk, a sorrendet is figyelembe véve. Ki kell számítanunk 9 elem harmadosztályú variációinak számát:

$$V_9^3 = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$$

Ha ezt a számot az előbbiből kivonjuk, akkor megkapjuk azoknak a számoknak a számát, melyek nem nullával kezdődnek.

$$V_{10}^4 - V_9^3 = = 5040 - 504 = 4536$$

Másik megoldás:

hely	1. 0 nem	2. az első helyen álló számjegy nem, de a 0 igen	3.	4.
A lehetőségek száma	9	9	8	7

9·9·8·7 = 4536 olyan négyjegyű szám van, amely különböző számjegyekből áll.

3. Hány 3 jegyű szám készíthető az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyek egyszeri felhasználásával?

Az első helyre bármelyik számot választhatom az 5 közül, a második helyre a maradék 4-ből, a harmadikra a maradék 3-ból választhatok.

hely	1.	2.	3.
A lehetőségek száma	6	5	4

Összesen $V_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ szám készíthető.

Másképp: $V_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

4. Egy 5 házból álló házsort szeretnénk kifesteni. Hányféle kifestés létezik, ha 7-féle festékünk van, és minden háznak különböző színűnek kell lenni? (Egy házhoz csak egyféle festéket használunk, a festékeket nem lehet keverni.)

Az első házhoz 7-féle festékből választhatunk, a másodikhoz a maradék 6-ból, a harmadikhoz a maradék 5-ből stb.,

hely	1.	2.	3.	4.	5.
A lehetőségek száma	7	6	5	4	3

Összesen $V_7^5 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$ lehetőség van.

Másképp: $V_7^5 = \frac{5!}{(5-3)!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

5. Hány 4 jegyű szám készíthető a 0, 1, 2, 3, 4 számjegyek egyszeri felhasználásával?

Az első helyre 4 számjegyből választhatok (0 nem állhat az első helyen), a második helyre a maradék 4-ből bármelyik kerülhet (itt már lehet 0), a harmadikra a maradék 3-ból bármelyik stb.

hely	1.	2.	3.	4.	5.
A lehetőségek száma	4	4	3	2	1

Azaz összesen 4·4·3·2 = 96 szám készíthető.

Másképpen: $V_5^4 - V_4^3 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 - 4 \times 3 \times 2 = 4 \times 3 \times 2 \times (5-1) = 96$

6. Hány különböző természetes szám készíthető a 0, 1, 2, 3, 4 számjegyek egyszeri felhasználásával?

Ezek a számok lehetnek5, 4, 3, 2, 1 jegyűek, ezek száma rendre:

$(V_5^5 - V_4^4) + (V_5^4 - V_4^3) + (V_5^3 - V_4^2) + (V_5^3 - V_4^1) + 5 = 261$

7. Egy bank egyik csoportja 8 különböző munkakört lát el. A fős csoport dolgozóit 15 jelentkező közül kell kiválasztani. Hányféleképpen állhat össze a csoport, ha 2 munkakört a 15 közül csak 4-en, a többit bármelyik jelentkező képes ellátni? (Egy személy csak egy munkakört lát el).

Megoldás: $V_4^2 \cdot V_{15-2}^6 = 14826240$

8. Egy hallgatói csoportban 15 lány és 6 fiú tanul.
a) Hányféleképpen lehet köztük 10 egymás mellé szóló mozijegyet kiosztani?
b) Mekkora ez a szám, ha a lányok és a fiúk felváltva akarnak ülni?
c) Oldjuk meg az előző két esetet 11 mozijegyre is!

10 jegyre: $V_{21}^{10} = 21 \cdot 20 \cdot \ldots \cdot 12$ illetve $2 \cdot V_{15}^5 \cdot V_6^5$

11 jegyre: $V_{21}^{11} = 21 \cdot 20 \cdot \ldots \cdot 12 \cdot 11$ illetve $V_{15}^6 \cdot V_6^5 + V_{15}^5 \cdot V_6^6$

9. Egy hallgatói csoportban 10 lány és ismeretlen számú fiú van. Három egymás mellé szóló színházjegyet 840-féleképp oszthatunk ki úgy, hogy azonos neműek nem ülnek egymás mellett. Hány fiú van a csoportban?

$V_{10}^2 \cdot V_n^1 + V_{10}^1 \cdot V_n^2 = 840$ ahonnan n= 6

10. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 számjegyek legfeljebb egyszeri felhasználásával számokat képezünk. Hány valódi
a) egyjegyű b) kétjegyű c) kétjegyű páros d) kétjegyű páratlan
e) háromjegyű f) háromjegyű hárommal osztható
g) háromjegyű hattal osztható h) négyjegyű 25-tel osztható
szám képezhető?

Oldjuk meg a feladatot úgy is, hogy nyolcadik számjegyként a 0-t is szerepeltessük!

Megoldások: a) $V_7^1 = 7$ b) $V_7^2 = 42$ c) $V_6^1 \cdot V_3^1 = 18$ d) $V_6^1 \cdot V_4^1 = 24$

e) $V_7^3 = 210$ f) 78 g) 34 h) $2 \cdot V_5^2 = 40$

(Az f) és a g) feladatokhoz a három számjegy: 123, 126, 135, 147, 156, 234, 246, 237, 345, 456, 267, 567, 357).

A 8 számjegy esetén a válaszok: a) $V_8^1 = 8$ b) $V_8^2 - V_7^1 = 49$

c) $V_7^1 - V_3^1 = 25$ d) $V_6^1 \cdot V_4^1 = 24$ e) $V_7^3 - V_6^2 = 180$ f) 106 g) 54

h) $2(V_6^2 - V_5^1) + V_6^2 = 80$

11. Egy iskola egyik osztályának 8 tantárgya van. Hányféle keddi órarend készíthető, ha:
a) pontosan 5 óra lehetséges és egyetlen tárgyból sem lehet egynél több óra
b) pontosan 5 óra lehetséges és rajból dupla óra is megengedett
c)legalább 4 óra és legfeljebb 6 óra lehetséges, és egyetlen tantárgyból sem fordulhat elő egynél több óra
d) legalább 4 és legfeljebb 6 óra lehetséges, és az ének dupla óra is lehet?

Megoldások: a) $V_8^5 = 6720$ b) $V_8^5 + 4 \cdot V_7^3 = 7560$

c) $V_8^4 + V_8^5 \cdot V_8^6 = 28560$

d) $\left(V_8^4 + 3 \cdot V_7^2\right) + \left(V_8^5 + 4 \cdot V_7^3\right) + \left(V_8^6 + 5 \cdot V_7^4\right) = 33726$

12. Egy dobozból, amelyben 8 piros és bizonyos számú fehér, számozott golyó van, egymás után, visszatevés nélkül 1280- féleképpen húzható ki 3 golyó úgy, hogy két piros, vagy két fehér golyó ne következzen egymás után. Hány fehér golyó van a dobozban?

Megoldás: $V_8^2 \cdot V_x^1 + V_x^2 \cdot V_8^1 = 1280$ vagy $56x + 8x(x-1) = 1280$ ahonnan x= 10.