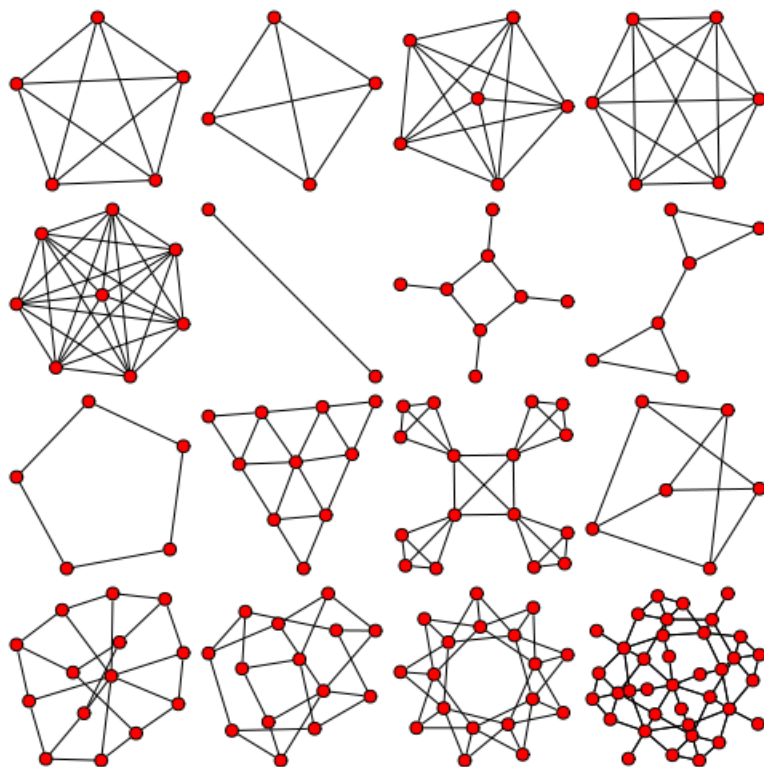
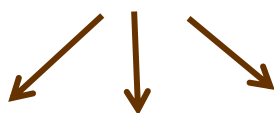


Gráfelméleti alapfogalmak

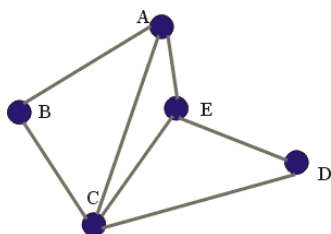
Gráf (angol graph= rajz): pontokból és vonalakból álló alakzat. A pontok a gráf **csúcsai**, a vonalak a gráf **élei**.



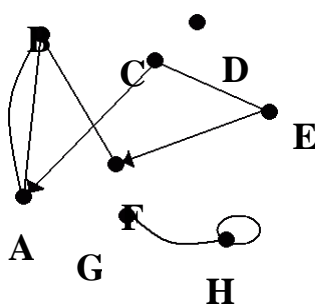
GRÁF



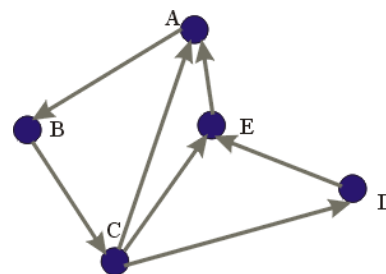
Irányítatlan gráf



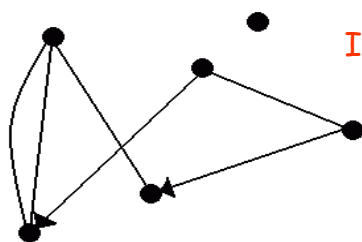
Vegyes gráf



Irányított gráf



**Többszörös él
(itt 2-szeres él)**



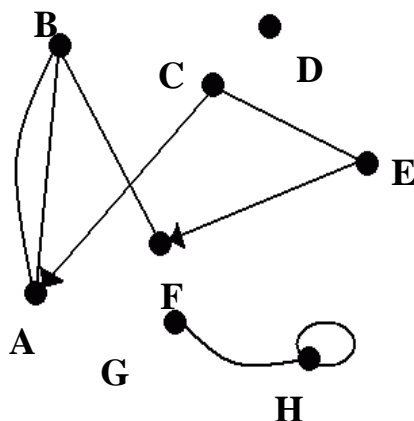
Izolált pont



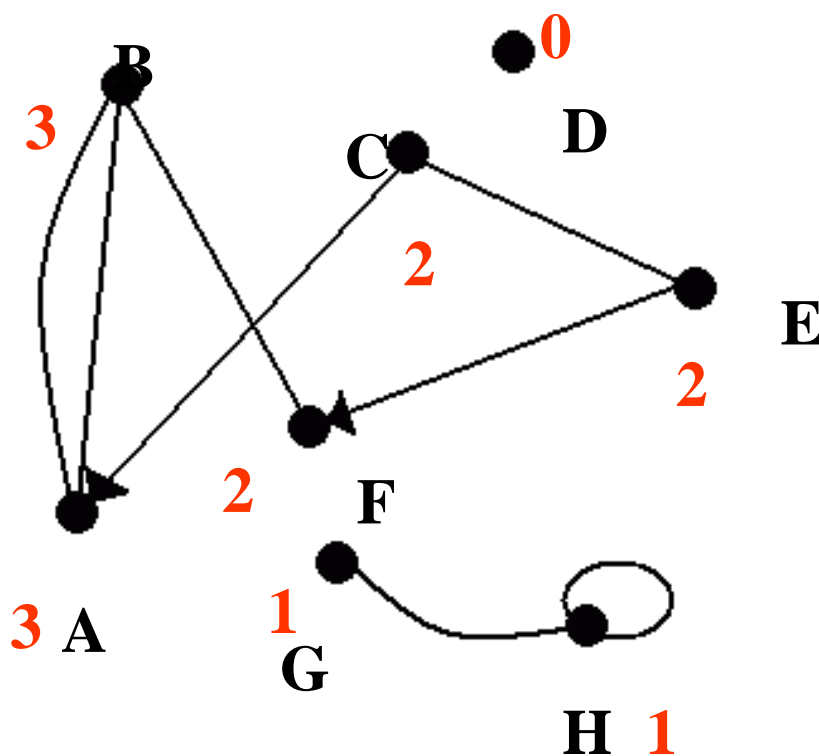
Huroké



Egy gráf egy csúcsa **izolált csúcs**, ha nem indul ki belőle él. (**D**)
Többszörös élről beszélünk, ha két pontot több él köt össze. (**A, B**)
 A **huroké**l önmagába visszatérő él, azaz két végpontja azonos. (**H, H**)
 Az **üres gráf** csupa izolált pontokból álló gráf, azaz **$E = \emptyset$** .
 Az **egyszerű gráfok** nem tartalmaznak sem hurokélet, sem többszörös élet.



Csúcsok foka (vagy fokszáma):
 az illető csúcshoz tartozó élek száma

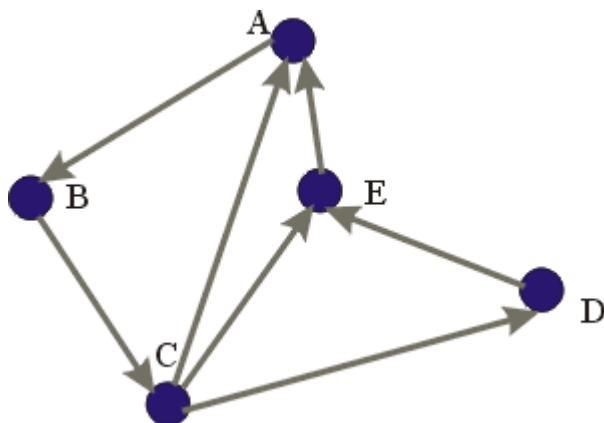


Csúcsok be-foka:

az illető csúcsba bemenő élek száma

Csúcsok ki-foka:

az illető csúcsból kimenő élek száma



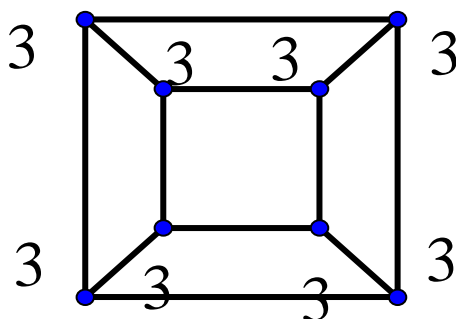
A: befok 2, kifok 1

B: befok 1, kifok 1

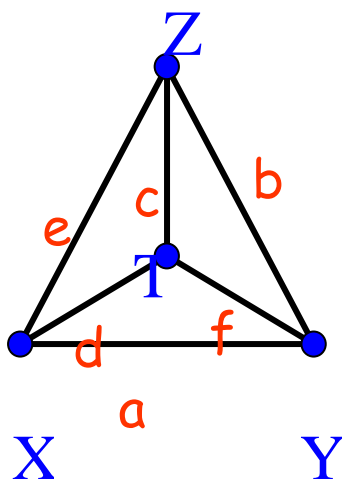
C: befok 1, kifok 2

D: befok 1, kifok 1

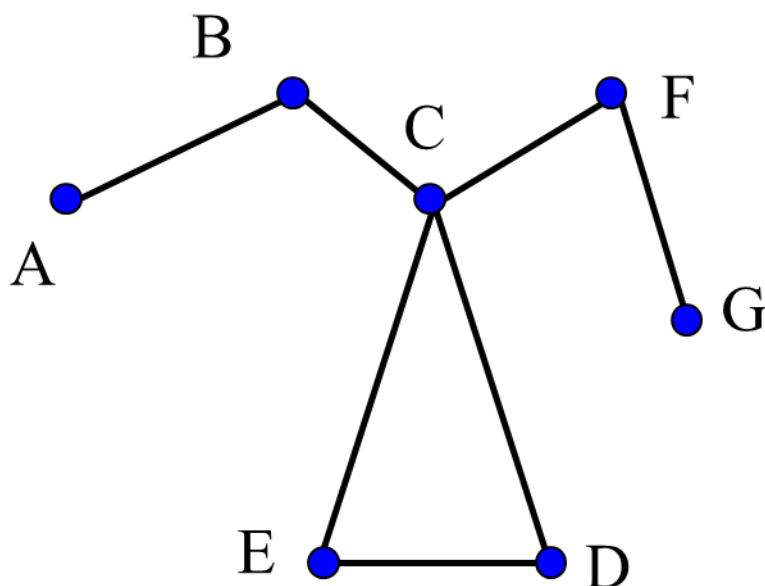
E: befok 2, kifok 1

Reguláris gráf: ha a fokszám minden csúcsra azonos

Egy **séta** csúcsok és élek váltakozó sorozata, mely csúccsal kezdődik és csúcsban végződik, és minden csúcs szomszédos az őt megelőző és őt követő éllel, illetve minden él két végpontja az őt megelőző és az őt követő csúcs. Egy séta **zárt**, ha első és utolsó csúcsai megegyeznek, különben **nyitott**.

Nyílt séta: $XaYfTcZ$ Zárt séta: $XdTfYbZex$

Vonalnak nevezzük a gráf csúcsainak és éleinek azt a sorát, amelyben az élek a megfelelő csúcsokat kötik össze és az élek nem ismétlődnek.

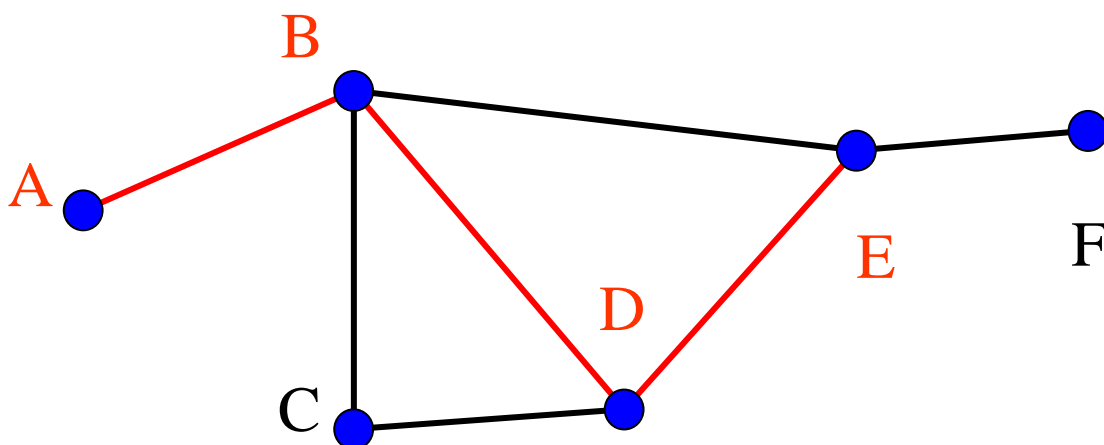


[ABCDECF] egy vonal

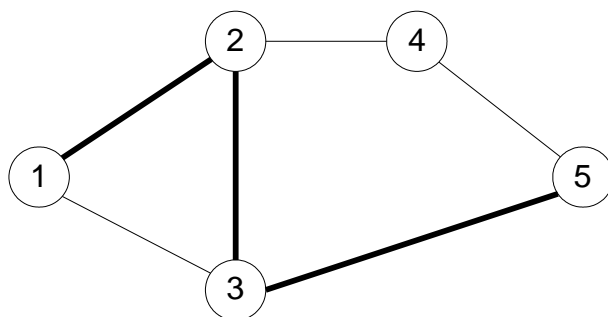
(tehát egy csúcs többször is szerepelhet, egy él, nem)

Út a gráfban:

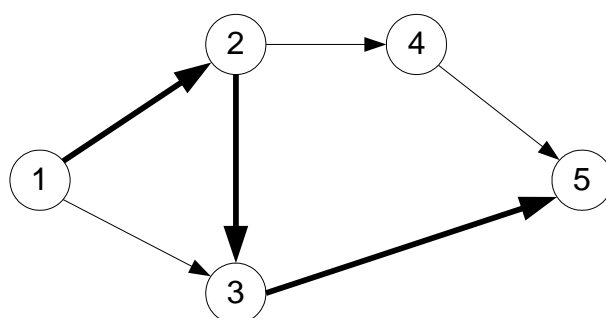
élek olyan egymáshoz csatlakozó sorozata, melyben sem él, sem pont nem fordulhat elő egynél többször.



Irányítatlan út: Az élek olyan sorozata, melyben bármely két szomszédos élnek van közös pontja.

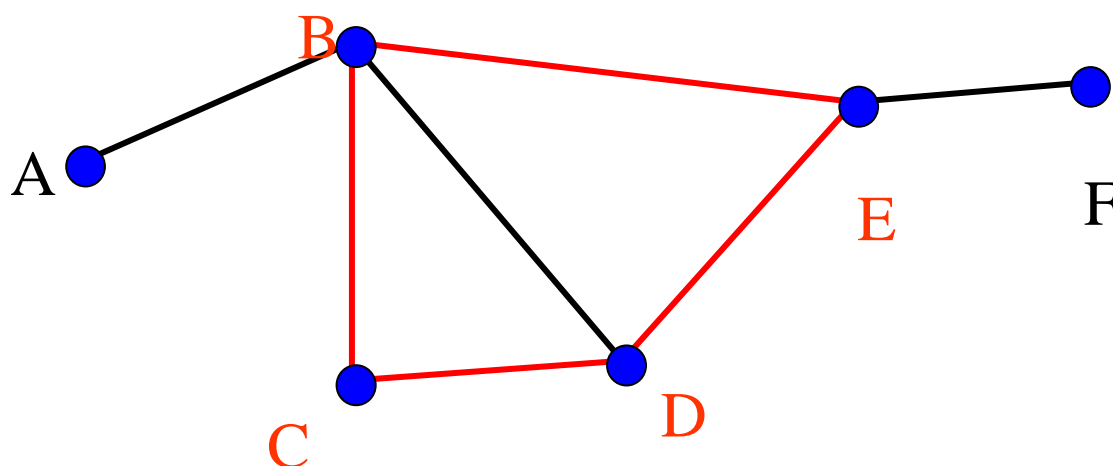


Irányított út: Élek olyan sorozata, amelyben bármely él végpontja azonos a következő él kezdőpontjával (kivéve az utolsót).



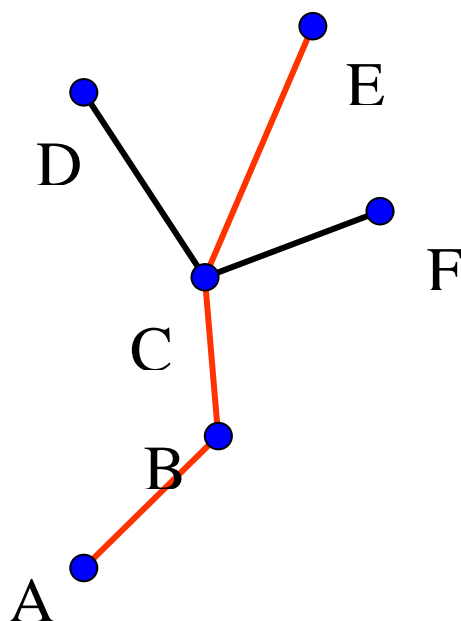
Kör a gráfban:

a kezdőpontjába visszavezető utat, azaz olyan élsorozatot, amely a kezdőpontjába tér vissza és benne minden él csak egyszer szerepel.



[BCDEB]-kör

Két csúcs **távolsága** a G gráfban az egyik legrövidebb köztük menő út hossza



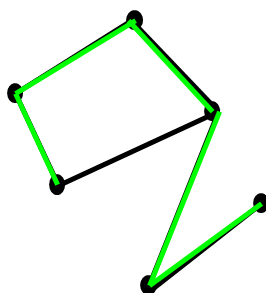
Pl. $d(A,E)=3$

Az **Euler-kör** a gráfelmélet speciális sétáinak egyike.

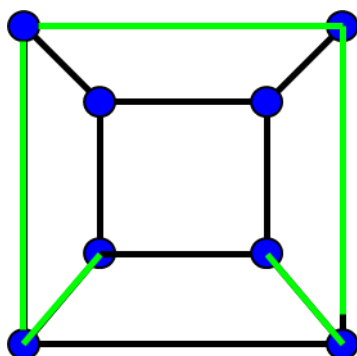
Ha egy gráf **MINDEN ÉLÉN** pontosan egyszer haladunk át, akkor ezt az utat **Nyílt Euler-vonalnak** (útnak) nevezzük.

Ha egy gráf **MINDEN ÉLÉN** pontosan egyszer haladunk át, és visszajutunk a kezdőpontba, akkor ezt az utat **Zárt Euler-vonalnak** (útnak) vagy **Euler-kör** - nek nevezzük.

Akkor nevezünk egy utat **Hamilton-útnak**, ha az a gráf *minden csúcsán* pontosan egyszer halad át.

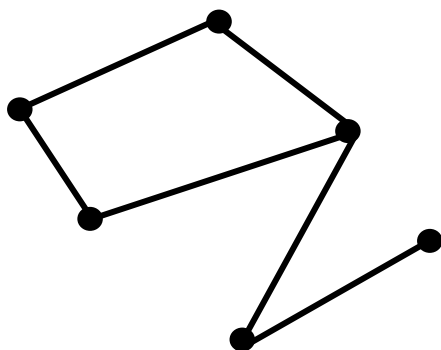


Akkor nevezünk egy utat **Hamilton-körnek**, ha az a gráf minden csúcsán pontosan egyszer halad át, és a kiindulási pont megegyezik az érkezési ponttal.



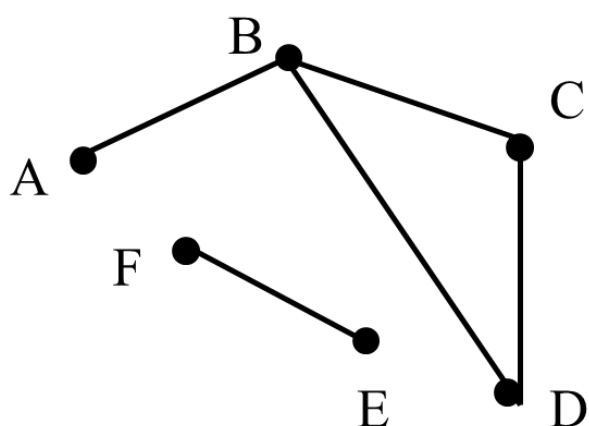
Összefüggő gráf:

ha bármely két különböző csúcsa között halad út

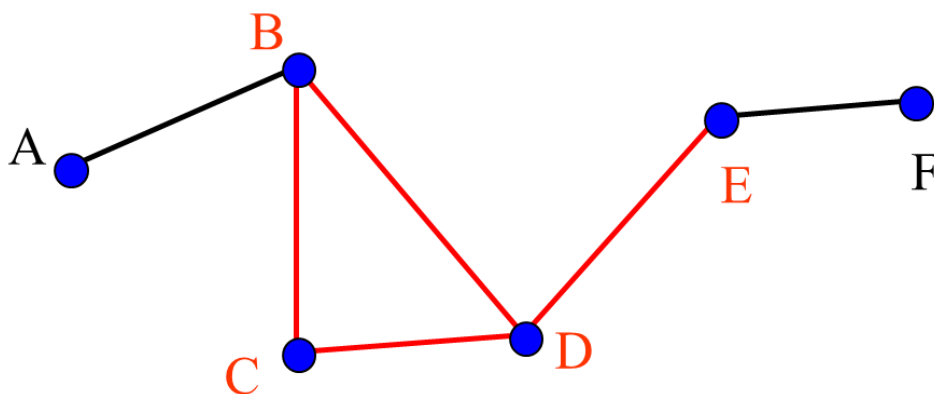


Nem összefüggő gráf:

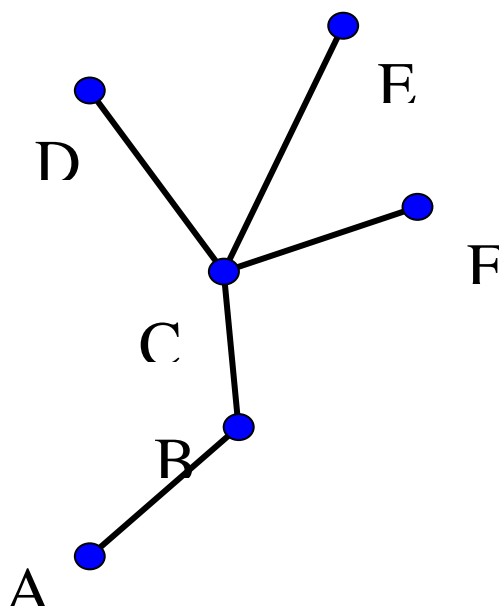
ha van olyan pont, amelyhez az élek mentén nem lehet eljutni



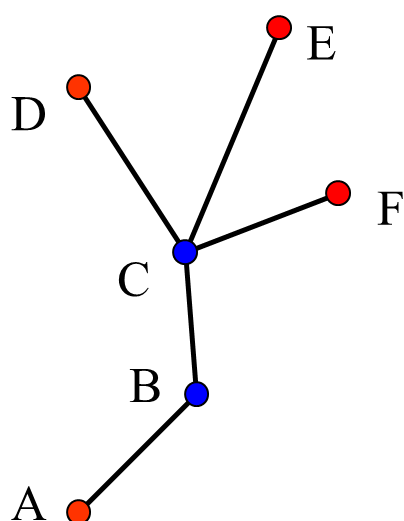
A G gráf **részgráf**ja egy olyan gráf, melynek csúcs- és élhalmazai részhalmazai G -éinek.



Fagráf: az a gráf, amelynek bármely két csúcsát pontosan egy út köti össze, azaz a fák körmentes összefüggő gráfok



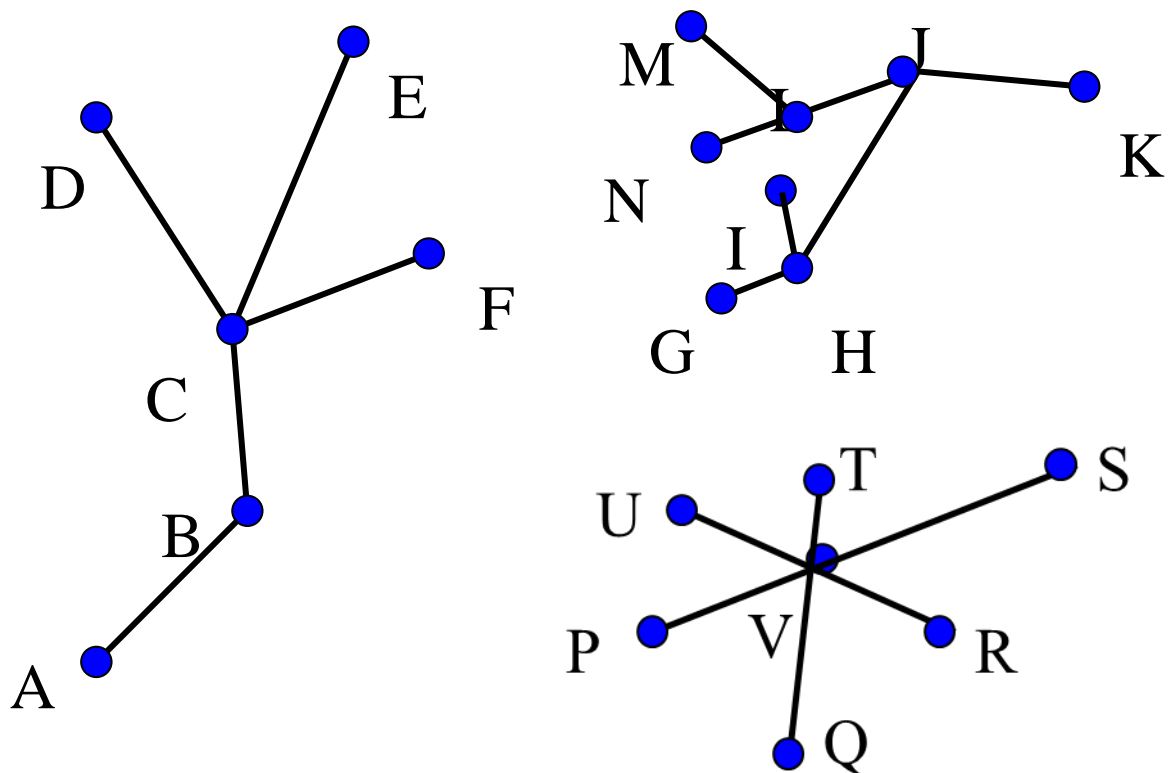
A fa első fokú csúcsait **levél**nek hívjuk. Egy nem levél csúcs a fában **belső csúcs**. Néha van a fának egy megkülönböztetett csúcsa, a **gyökér**.



D, E, F, A- levelek

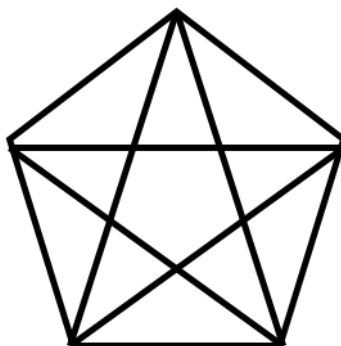
B, C - belső csúcsok,
gyökerek is lehetnek

Erdőnek nevezzük azokat gráfokat, amelynek bármely két csúcsát *legfeljebb egy út* köti össze, azaz ahogy az elnevezés is utal rá, az erdő össze nem függő fák uniója, vagy ami ezzel ekvivalens az erdők körmentes gráfok.



Teljes gráf:

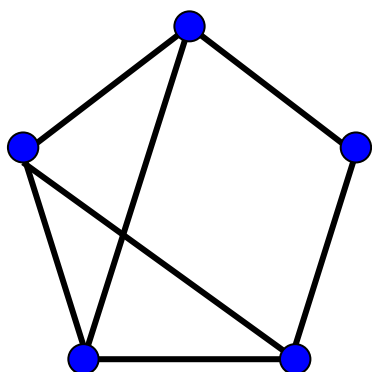
olyan gráf, amelyben minden csúcsot él köt össze



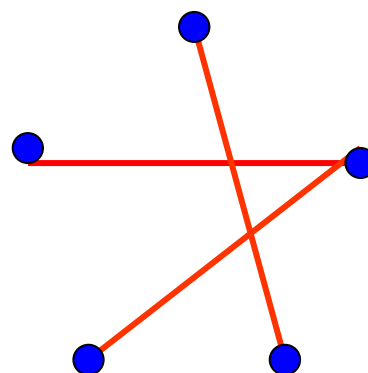
Komplementer (kiegészítő) gráf:

a gráfot a teljes gráfig kiegészítő gráf

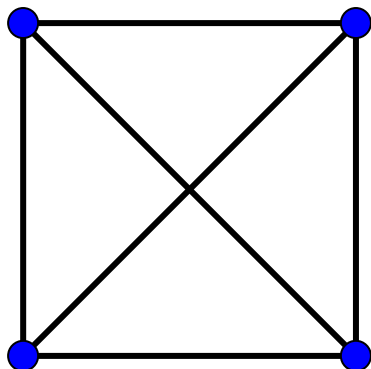
(pontjai megegyeznek az eredetivel, de ott van él, ahol az eredetiben nincs)



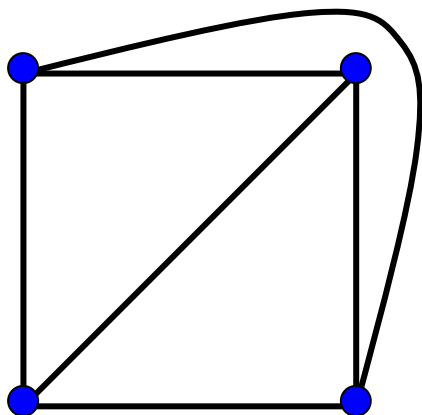
Komplementer →



Síkgráf: ha az éleinek nincsen - a végpontoktól különböző - közös pontjuk (vagyis az élei nem metszik egymást).

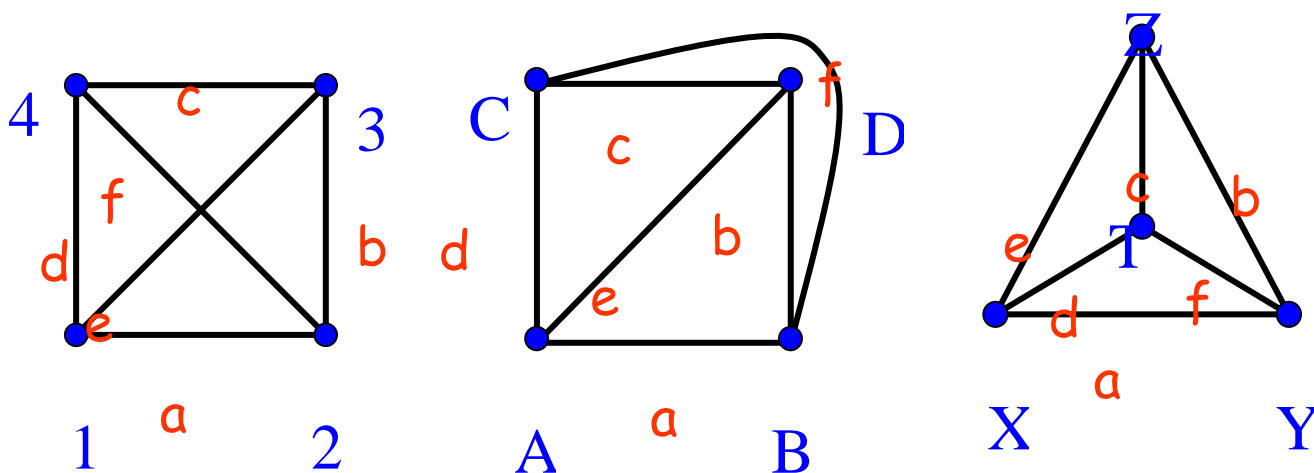


Nem síkgráf



Síkgráffá alakítva

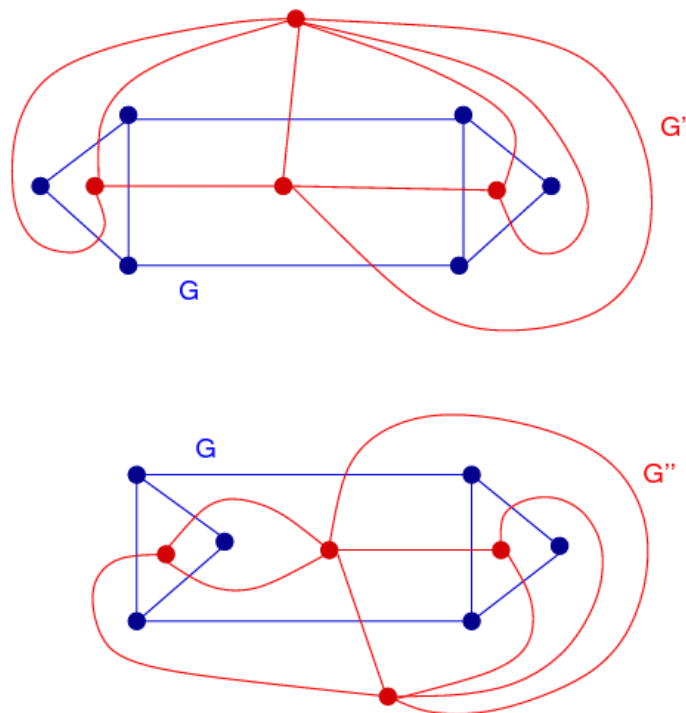
Izomorf gráfok: ha van olyan egyértelmű megfeleltetés melyet izomorfizmusnak hívunk, hogy két csúcs szomszédos G -ben akkor és csak akkor, ha a megfelelőik szomszédosak H -ban.



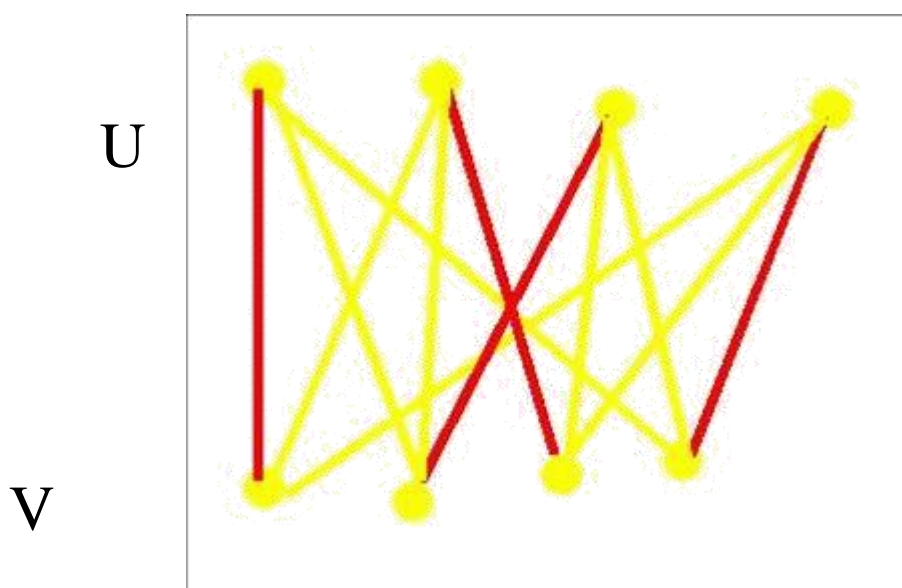
A 3 gráf izomorf

(végtelen sok van, ha a pontok helyzetét, és az élek alakját változtatjuk)

Egy síkba rajzolt G gráf **duális gráf**ja (jelölése G^*) egy olyan gráf, melynek csúcsai G tartományai (beleértve a külső tartományt is); és minden G -beli élnek megfelel egy él G^* -ban, úgy hogy a duálisbeli él azt a két (nem feltétlenül különböző) csúcsot köti össze amelyek az eredeti él szomszédos tartományai.

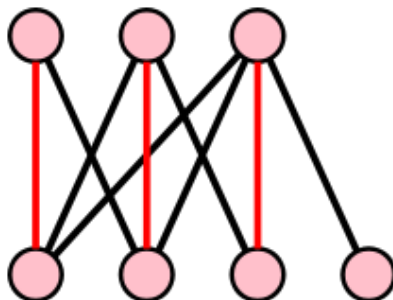


Páros gráfnak nevezünk egy G gráfot, ha csúcsainak halmazát fel tudjuk úgy osztani egy U és V halmazra, hogy az összes G -beli élre teljesül, hogy az egyik végpontja U -ban van, a másik pedig V -ben. Egy páros gráfot következőképpen jelölünk: $G=(U,V)$.



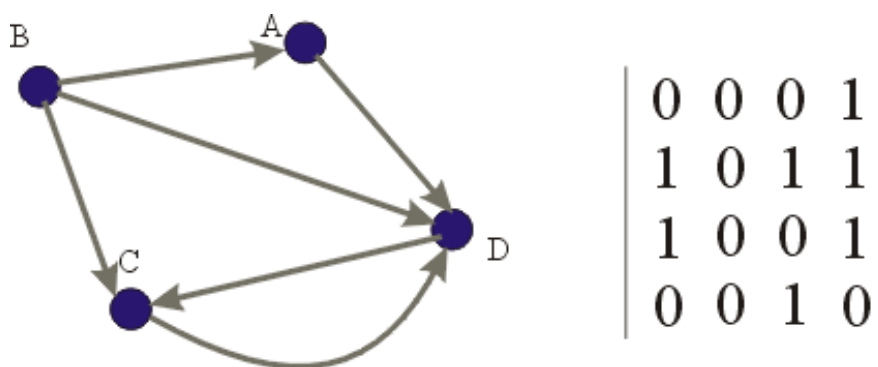
Párosítás: Irányítatlan gráfban egy él két csúcsot állít párba. Legfeljebb hány csúcsot tudunk egyszerre párba állítani, ha minden csúcs legfeljebb egy párhoz tartozhat?

Ez a kérdés például akkor is, ha egy csapat tagjainak akarunk egy-egy önálló feladatot kiosztani, úgy hogy a lehető legtöbb feladat legyen kiosztva. A gráf csúcsai a feladatok és az emberek, és egy élet akkor húzunk be, ha az illető el tudja végezni a feladatot.



Párosítás (piros) páros gráfban

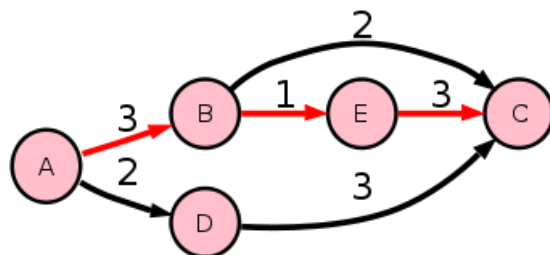
Szomszédsági mátrix: egy olyan mátrix, aminek annyi sora és annyi oszlopa van, amennyi a gráfban található csúcspontok száma. A szomszédsági mátrixot A -val szokás jelölni. A mátrixnak az i, j eleme akkor 1, ha az i -dik csúcspontból él vezet a j -edik csúcsba.



Súlyozott gráfban a gráf minden éléhez számértéket rendelünk, az él *súlyát*. Az *élsúlyok* legtöbbször valós számok, de adott esetben szorítkozhatunk racionális vagy egész számokra is.

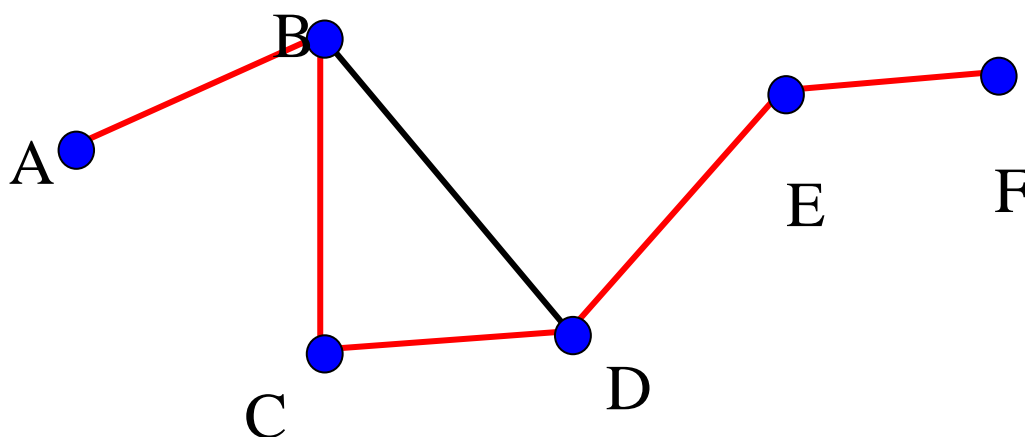
Egy *út súly*, vagy egy *fa súly* az őt alkotó élek összsúlya.

A súlyok jelenthetnek legrövidebb úthosszat, minimális költséget, minimális időt, stb.



A piros a leghosszabb út, *kritikus út*.

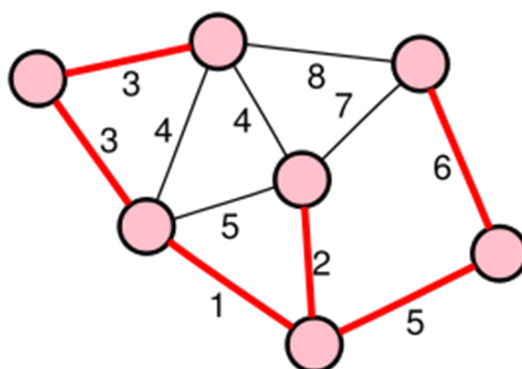
Legyen G egyszerű, összefüggő gráf. Az F fa a G gráf **fesztő fája**, ha F olyan részgráfja G -nek, mely a G minden csúcsát és bizonyos éleit tartalmazza.



ABCDEF fesztőfa

Minimális fesztő fa: Súlyozott gráfban válasszunk ki néhány élet úgy, hogy a gráf még összefüggő maradjon, de az élek összsúlya minimális legyen!

Pl. egy létesítendő (víz-, csatorna-, számítógép-) hálózattal szemben az elvárás, hogy ha nem is közvetlenül, de minden csomópontot kössön össze és olcsó legyen kiépíteni.



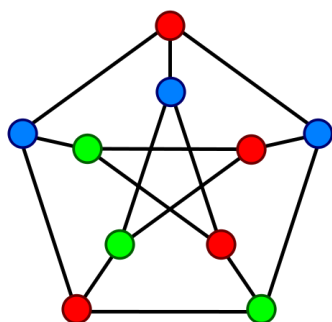
Figyelem! Nem a felhasznált élek számát kell minimalizálni, hanem a „hosszaik” összegét.

Kromatikus szám (csúcskromatikus szám):

az a szám, ahány színnel ki lehet színezni egy gráf csúcsait úgy, hogy minden él végpontján a színek különbözőek legyenek. Jele: $X(G)$



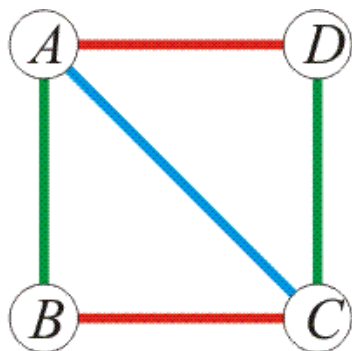
Például:



$$X(G)=3$$

Élkromatikus szám :

az a szám, ahány színnel ki lehet színezni egy gráf éleit úgy, hogy az egymáshoz illeszkedő élek különböző színűek legyenek. Jele: $X_e(G)$



$$X_e(G)=3$$