Gráfelméleti megrajzolási problémák

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

A következő problémák vizsgálatával foglalkozunk:

1.) Egyvonalas megrajzolhatósági problémák

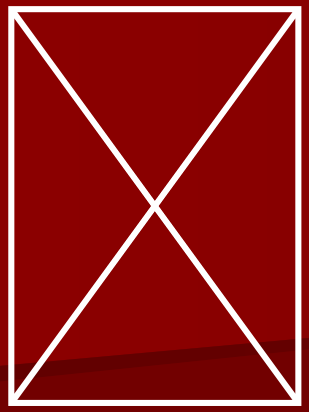
2) Egyvonalas bejárhatósági problémák

3) Hamilton útak és körök a gráfban

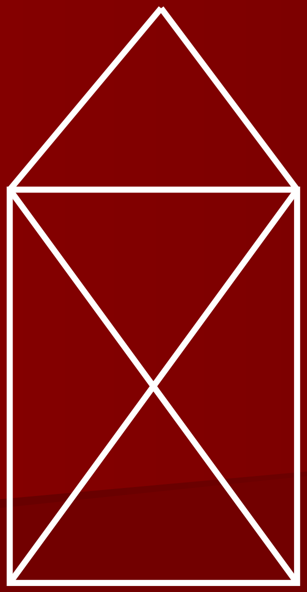
4) Síkgráfok megrajzolhatósága

Egyvonalas megrajzolhatósági problémák

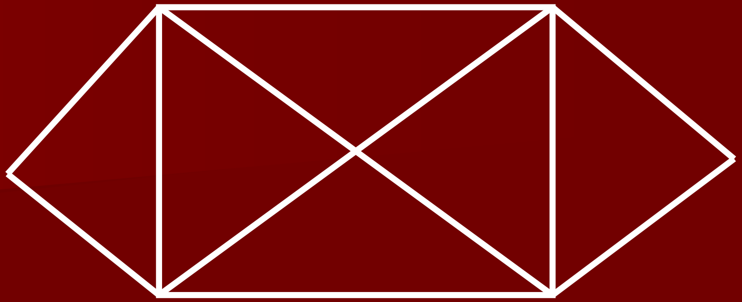
- A következő ábrák megrajzolhatóak-e egy vonallal?
- Ha igen, hol kezdhető, és hol ér véget a rajzolás?



1. ábra



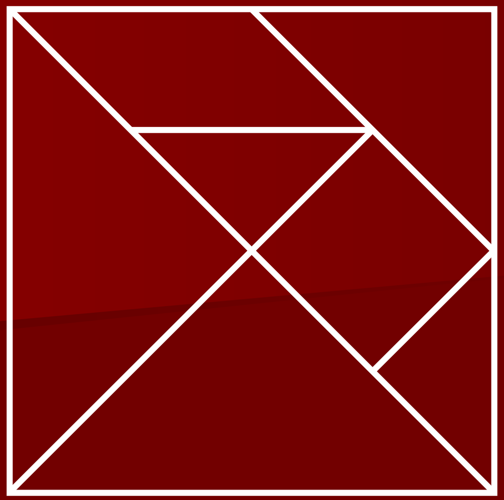
2. ábra



3. ábra

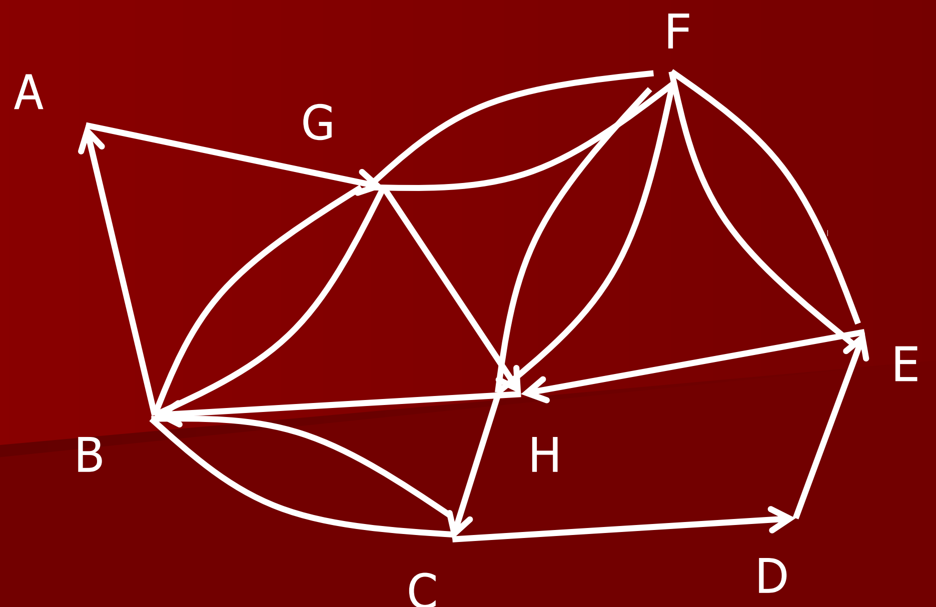
Egyvonalas megrajzolhatósági problémák

- Az ábrán látható Tangram-készlet legtöbb hány vonala rajzolható meg a ceruza felemelése nélkül?
- Legkevesebb hány ceruza-felemeléssel rajzolható meg a teljes ábra?



Egyvonalas megrajzolhatósági problémák

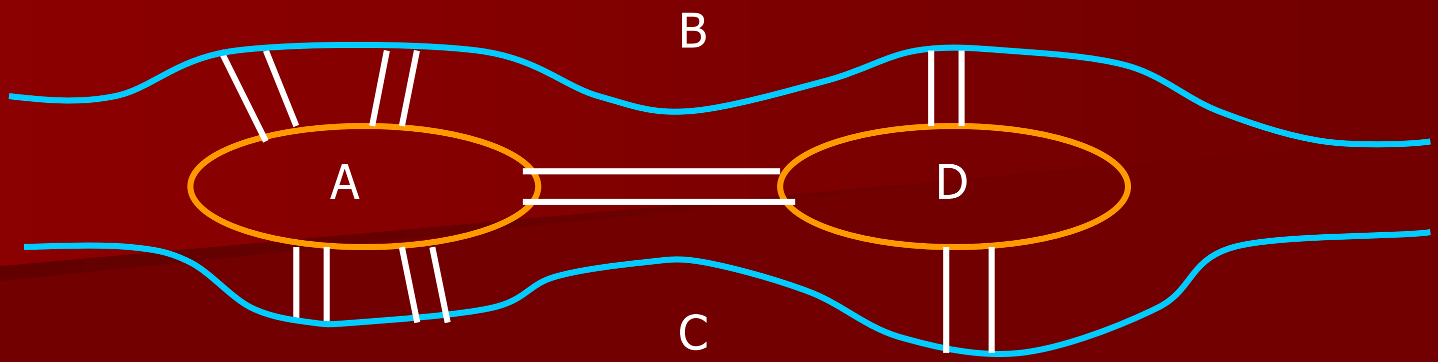
- A következő ábra megrajzolható-e egy vonallal, ha az irányított élen, csak a nyíl irányában haladhatunk?
- Hol kezdhető a megrajzolás, és hol ér véget?



Egyvonalas bejárhatósági problémák

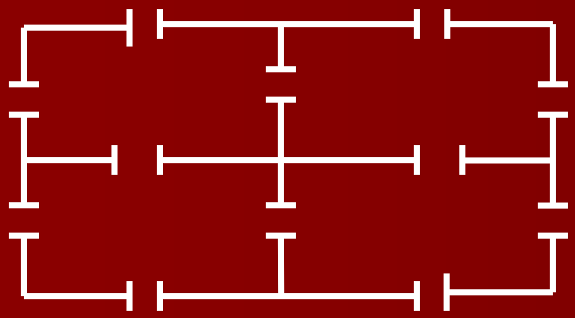
- A königsbergi hidak problémája (1700-1736, Euler)

A városban 7 híd volt, a probléma pedig abban állt, hogy lehetséges-e körbemenni egy városrészből indulva, <u>ugyanoda érkezve</u>, meglátogatni minden városrészt <u>pontosan egyszer</u> használva mindegyik hidat.

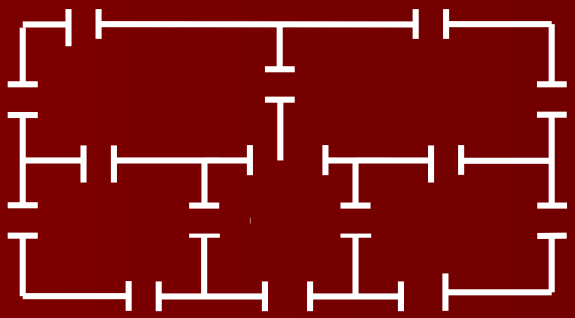


Egyvonalas bejárhatósági problémák

- Bárhonnan indulva, végig lehet-e menni minden ajtón pontosan csak egyszer?



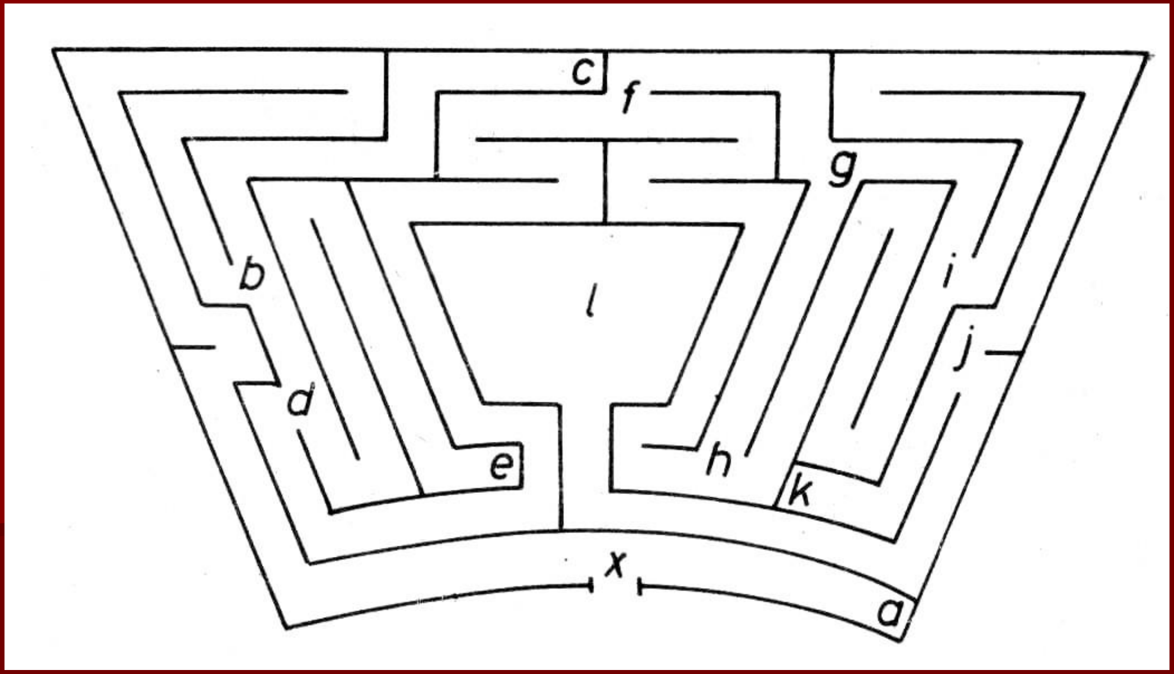
4. ábra



5. ábra

Egyvonalas bejárhatósági problémák

Az ábrán látható labirintust a lehető legrövidebb úton kell bejárni úgy, hogy az x-ből indulunk, minden folyóson körbe kell járjunk, aztán visszaérjünk az x-be.



Euler vonalak (útak)

- Ha egy gráf MINDEN ÉLÉN pontosan egyszer haladunk át, akkor ezt a megrajzolást Euler vonalnak (útnak) nevezzük.
- Ha a kiinduló pont NEM EGYEZIK meg az érkezési ponttal, akkor az utat NYÍLT Euler útnak nevezzük.
- Ha a kiinduló pont MEGEGYEZIK az érkezési ponttal, akkor az utat ZÁRT Euler útnak (körnek) nevezzük.

A megrajzolhatósági vagy bejárási problémák: nyílt vagy zárt Euler út keresését jelentik!

Euler tételei:

1.Tétel:
A gráf akkor és csakis akkor rajzolható meg egy vonallal úgy, hogy bárhol kezdhetünk, és ugyanoda érünk vissza, ha MINDEN csúcs fokszáma páros szám.

2.Tétel:
Ha egy gráfban pontosan 2 csúcs PÁRATLAN fokszámú, a többi páros, akkor a gráf megrajzolható egy vonallal, az egyik páratlan fokszámú csúcsban kezdünk, és a másikba érkezünk.

Euler tételeinek következményei:

1. Következmény: Ha egy grágnak 2-nél több csúcsa páratlan fokszámú, akkora gráf NEM rajzolható meg egy vonallal.

2. Következmény: Ha egy összefüggő gráfban a páratlan fokú csúcsok száma 2k, akkor gráfot k közös él nélküli gráfra bonthatjuk.

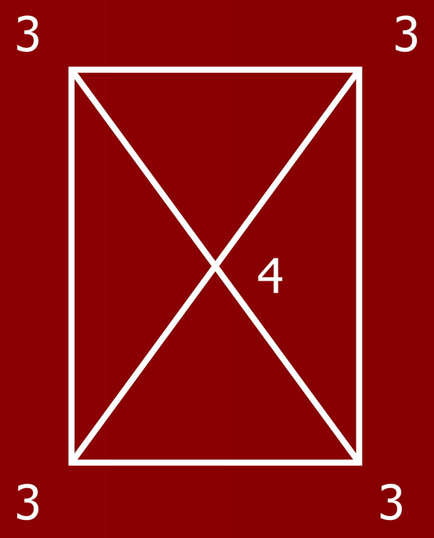
Tehát a gráf egyvonalas megrajzolásánál (k-1)-szer kell felemelnünk a ceruzát, legkevesebb ennyi él nem rajzolható meg, ha egyvonallal rajzolunk.

Euler tétele irányított gráfokra:

<u>Tétel</u>: Egy gráfban akkor és csakis van Euler-kör, ha minden csúcsának a ki- és a befoka egyenlő.

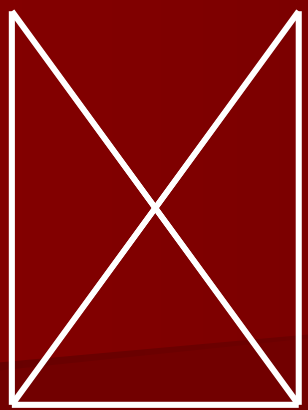
(Az egyvonalas megrajzolást akármelyik pontban lehet kezdeni, és ugyanoda vissza is érünk.)

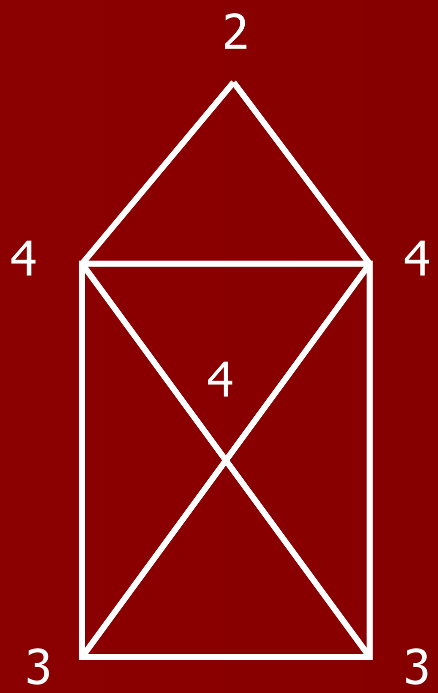
<u>Következmény</u>: Ha egy irányított gráfnak van páratlan fokszámú csúcsa, akkor az nem rajzolható meg egy vonallal.



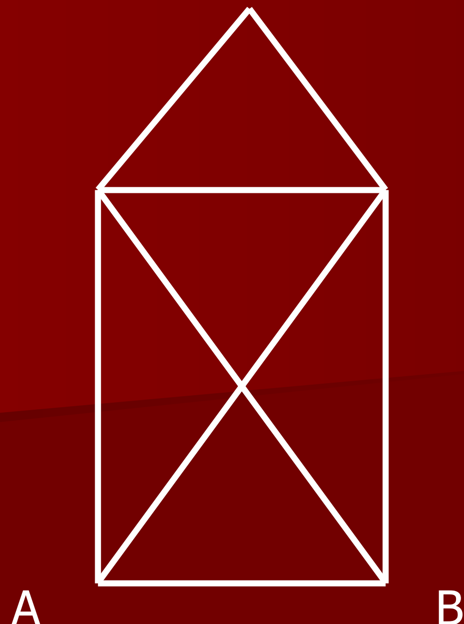
Mivel 4 csúcs fokszáma PÁRATLAN
(és nem csak 2), ezért a gráf nem rajzolható meg egyetlen folytonos vonallal.

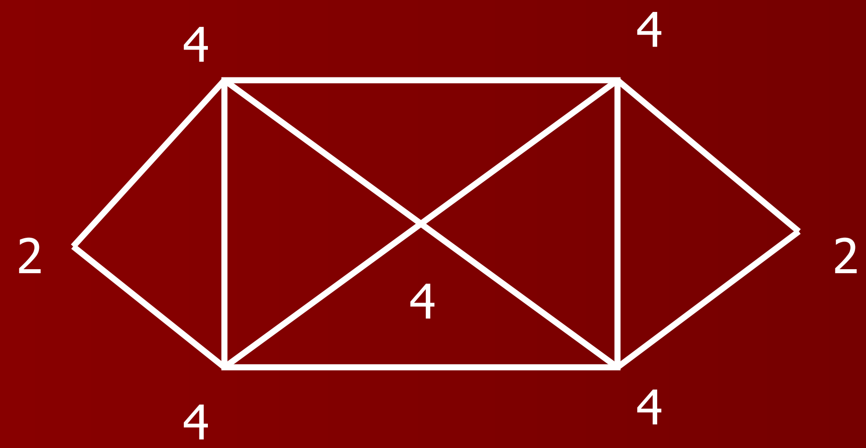
Ellenben, ha kitöröljük valamelyik élet, akkor csak 2 páratlan fokszámú lesz, és érvényes lesz Euler 2.Tétele.



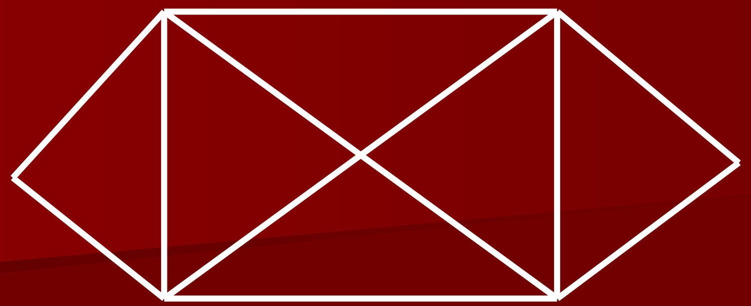


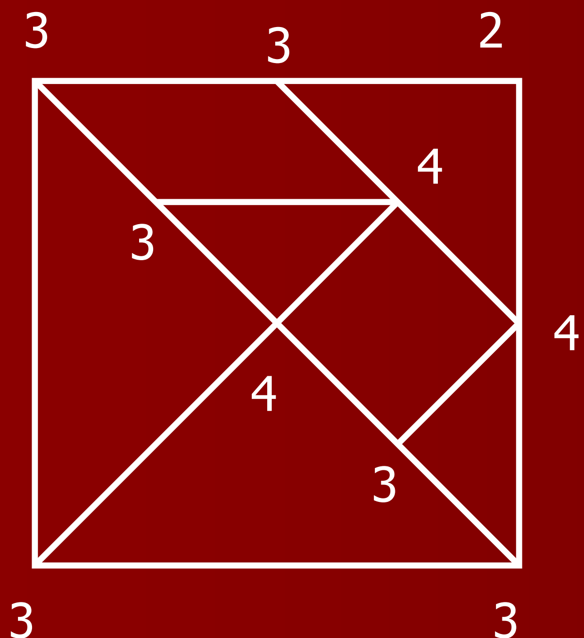
Mivel pontosan 2 csúcs fokszáma PÁRATLAN, ezért Euler 2. Tétele szerint a gráf megrajzolható egy vonallal, valamelyik páratlan fokszámú csúcsban kezdünk, és a másikban végezzük.





Mivel minden csúcs fokszáma páros szám, ezért Euler 1. Tétele értelmében a gráf megrajzolható egyetlen vonallal, bárhol kezdhető, és ugyanoda érkezünk vissza.



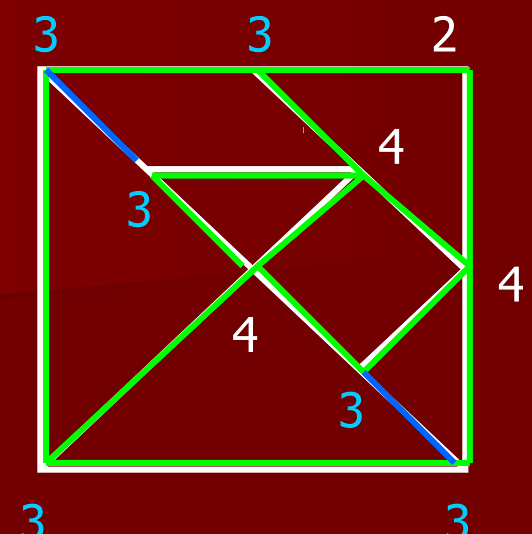


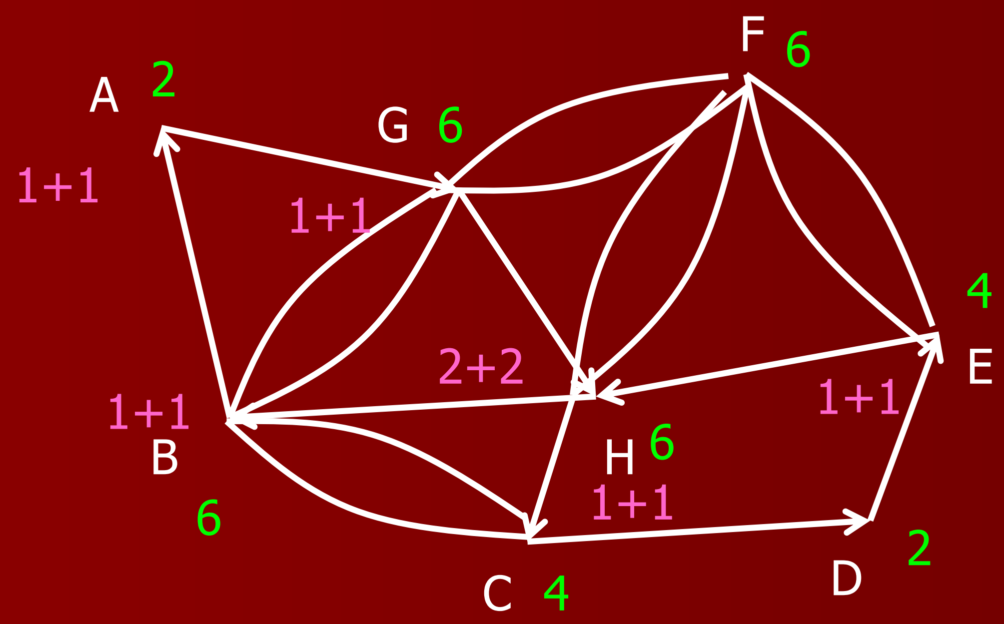
Írjuk fel az egyes csúcsok fokszámait!

Látható, hogy 6=2×3 (k=3) <u>páratlan fokú csúcs van</u>, ez 3 olyan élet határoz meg, amelynek végei 3-3 fokúak.

Tehát a ceruzát (k-1)= 3-1=<u>2-sze</u>r kell felemelni.

Ezért a 3 darab páratlan él közül <u>2 darab nem rajzolható meg,</u> a többi igen.

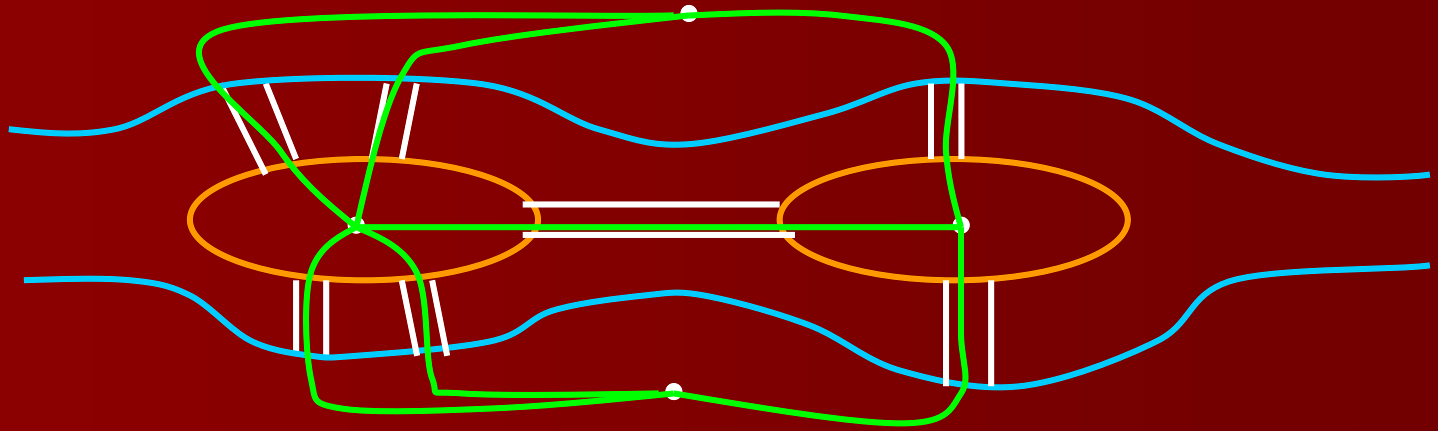


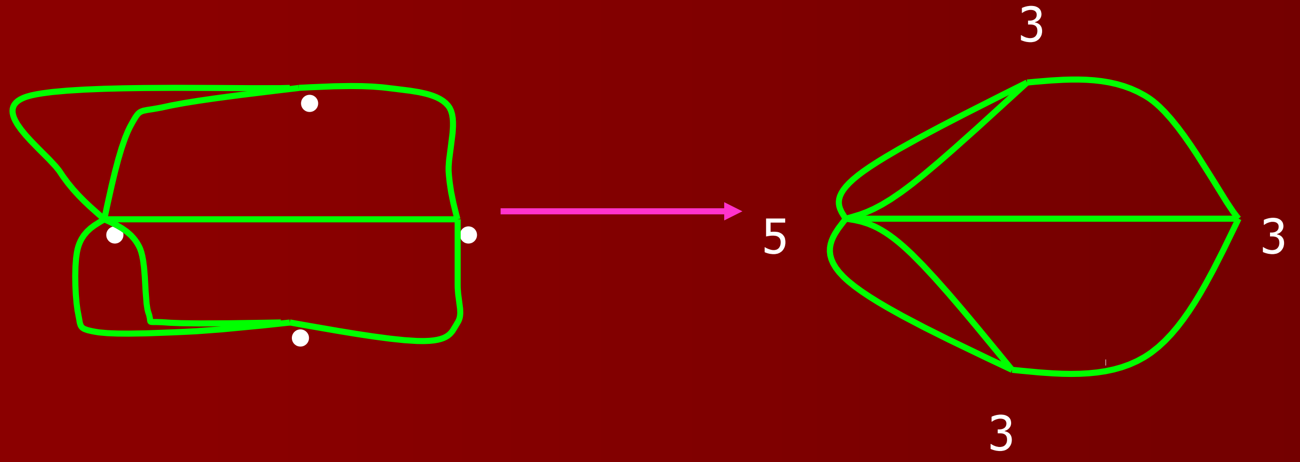


• Látható, hogy minden csúcs páros fokszámú!

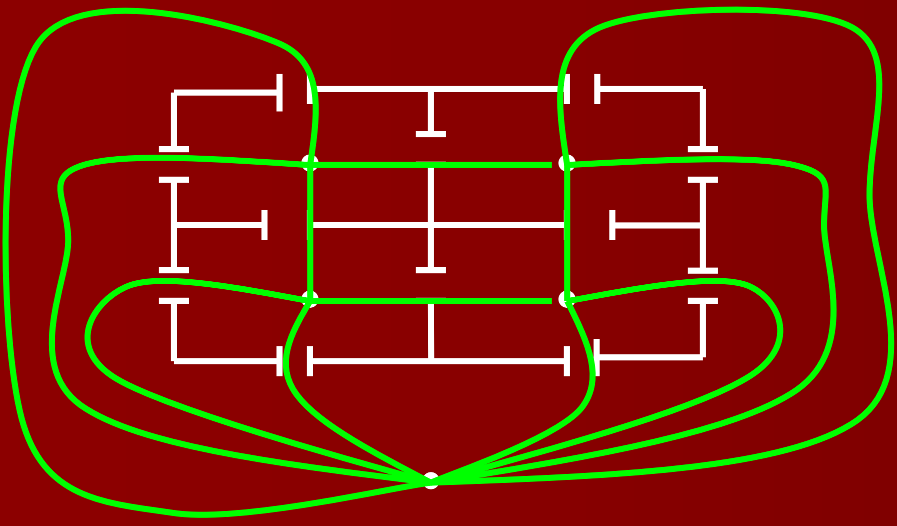
• Minden csúcsban a bemenő és kimenő csúcsok fokszáma megegyezik

• Tehát a gráf megrajzolható egy vonallal (létezik Euler-kör), akárhol kezdhetünk, és ugyanoda érünk vissza.

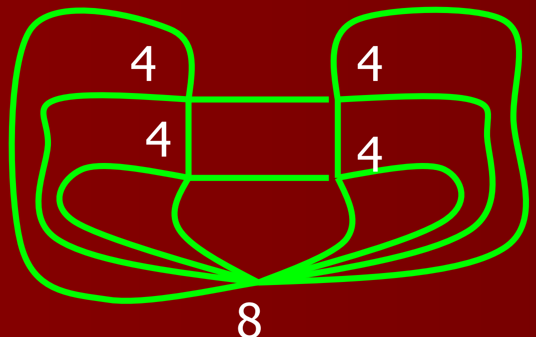




Mivel <u>2-nél több csúcs</u> fokszáma páratlan, ezért az Euler tételei értelmében a gráf nem rajzolható meg egy vonallal, tehát a séta nem lehetséges ☹



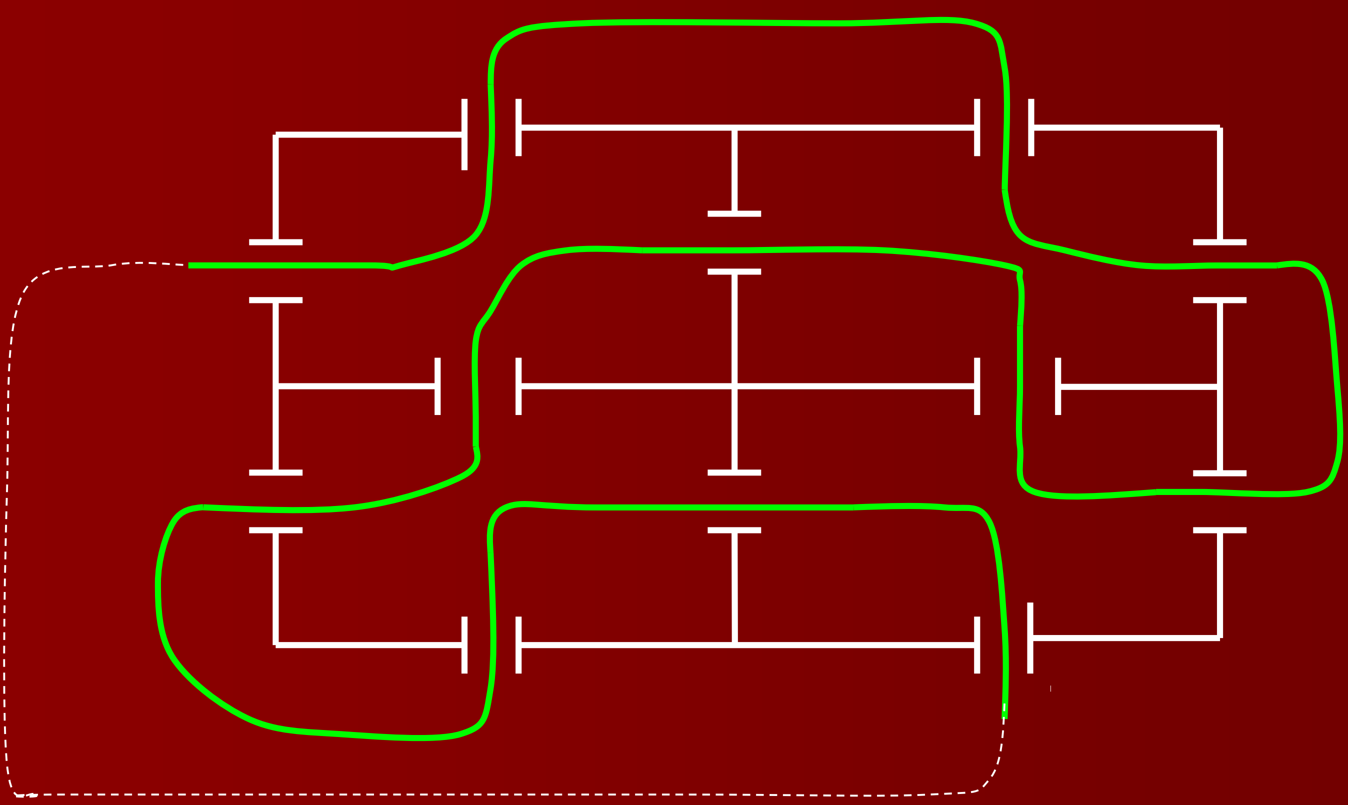
Rajzoljuk meg a feladat gráfját. Minden külön tartomány egy-egy pont lesz, az ajtók pedig a gráfban az élek.



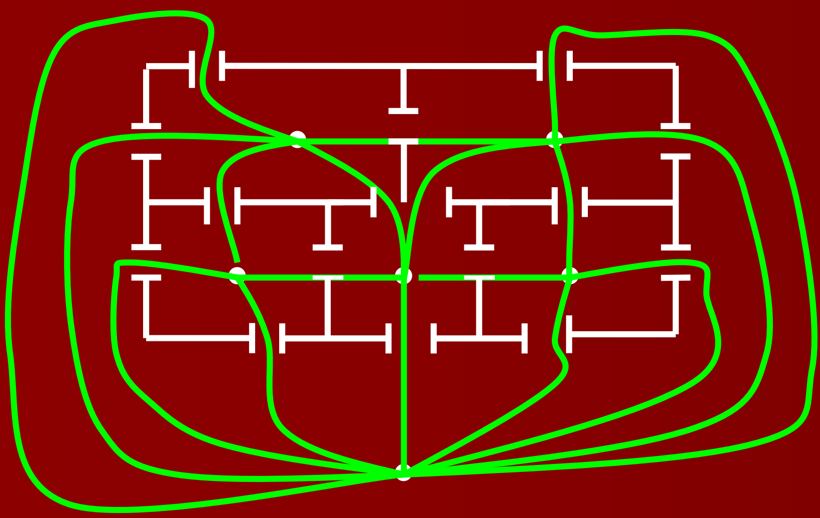
Az Euler 1. Tétele értelmében a séta MEGVALÓSÍTHATÓ, bárhol elkezdhető, és ugyanoda vissza is érünk.

(Ha kintről indultunk, akkor is ugyanoda visszaérünk)

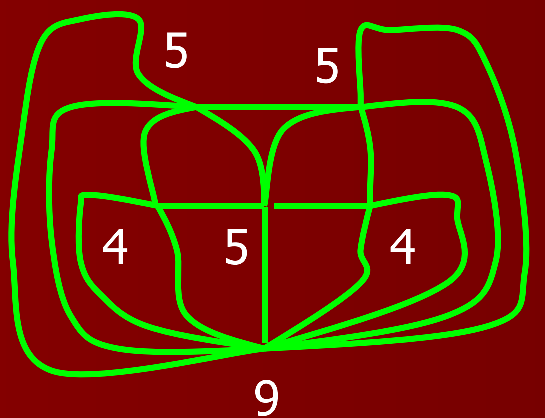
A séta egy kivitelezése



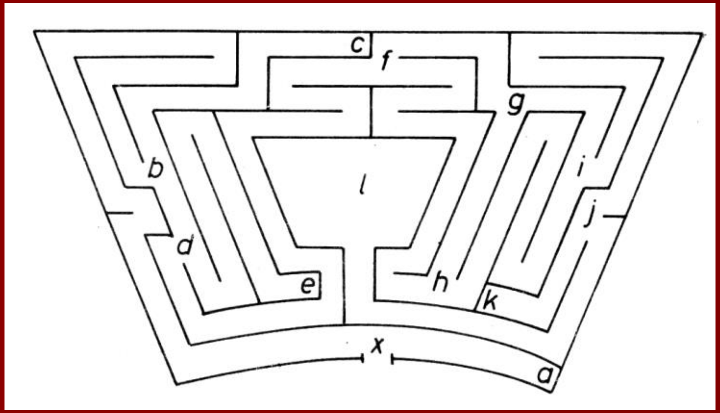
Kintről indultunk, és ugyancsak kintre érkeztünk, de bárhonnan is indulhattunk volna, ugyanoda érkeznénk.



Rajzoljuk meg a feladat gráfját. Minden külön tartomány egy-egy pont lesz, az ajtók pedig a gráfban az élek.

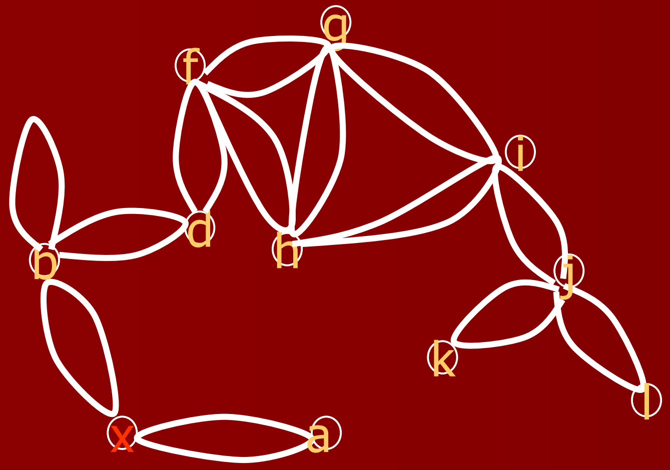


Mivel több mint 2 páratlan fokszámú csúcs van, ezért a séta nem valósítható meg. De egyetlen él törlésével (egy ajtó lezárásával) már megvalósítható, de nem juthatnánk vissza a kiindulópontba.



A labirintus gráfja a mellékelt ábrán látható. Feladatunk, hogy ebbe keressünk egy Euler-kört, ami az x-ben kezdődik, és ott is ér véget.

Mivel minden csúcs fokszáma páros, ezért van Euler-kör.



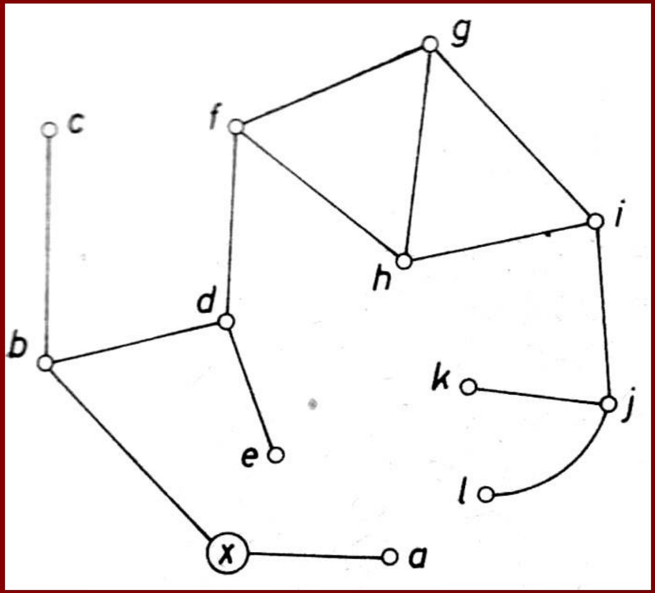
Mindig a fal mellett jobbra haladva el alapján egy Euler-kör a következő:

x, b, c, b, d, f, g, i, j, l, j, k, j, i, h, g, h, i, g, f, h, f, d, e, d, b, x, a, x

Így minden élen csak egyszer mentünk át, és visszajutottunk a kezdőpontba.

Megjegyzés:

A feladat gráfja a következő is lehet (nincsenek dupla élek):



Ebben az esetben az x-pontból kell indulni, a gráf minden <u>élén</u> pontosan 2-szer kell áthaladni, ez is ugyanazt jelenti!

x, b, c, b, d, f, g, i, j, l, j, k, j, i, h, g, h, i, g, f, h, f, d, e, d, b, x, a, x

Hamilton útak és körök a gráfban

Akkor nevezünk egy utat Hamilton-útnak, ha az a gráf minden csúcsán pontosan egyszer halad át.

Akkor nevezünk egy utat Hamilton-körnek, ha az a gráf minden csúcsán pontosan egyszer halad át, és a kiindulási pont megegyezik az érkezési ponttal.

Hamilton útak és körök a gráfban

Hamilton-körök illetve utak keresésére ma sem ismert igazán jó algoritmus

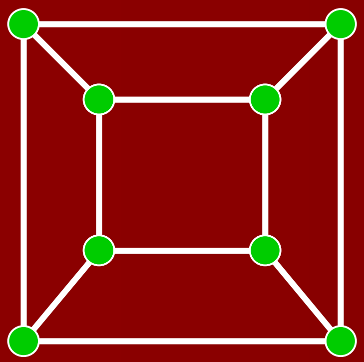
SZÜKSÉGES feltétel Hamilton-kör létezésére:

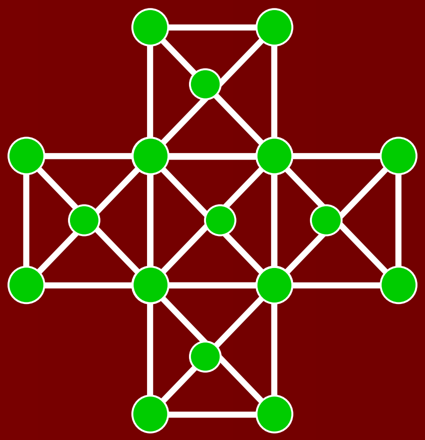
Tétel: Ha egy gráfban k pontot elhagyva k-nál több komponens keletkezik, akkor nem tartalmazhat Hamilton-kört.

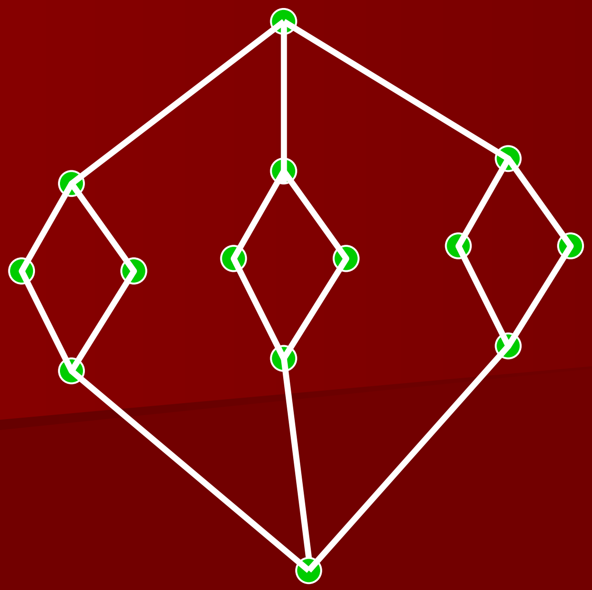
ELÉGSÉGES feltétel Hamilton-kör létezésére:

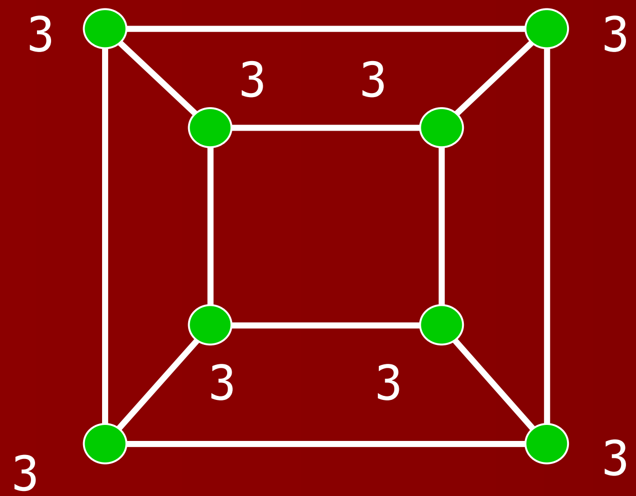
Dirac tétele: Ha egy n csúcsú egyszerű gráfban minden csúcs fokszáma LEGALÁBB n/2, akkor a gráf tartalmaz Hamilton kört (és tehát Hamilton- utat is)

Vizsgáljuk meg,
vannak-e Hamilton-körök vagy Hamilton-útak a gráfokban:





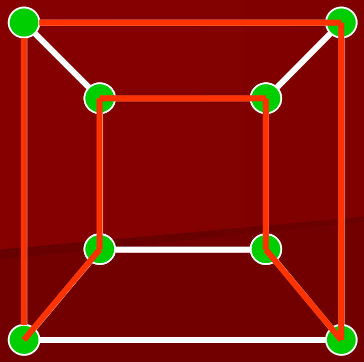


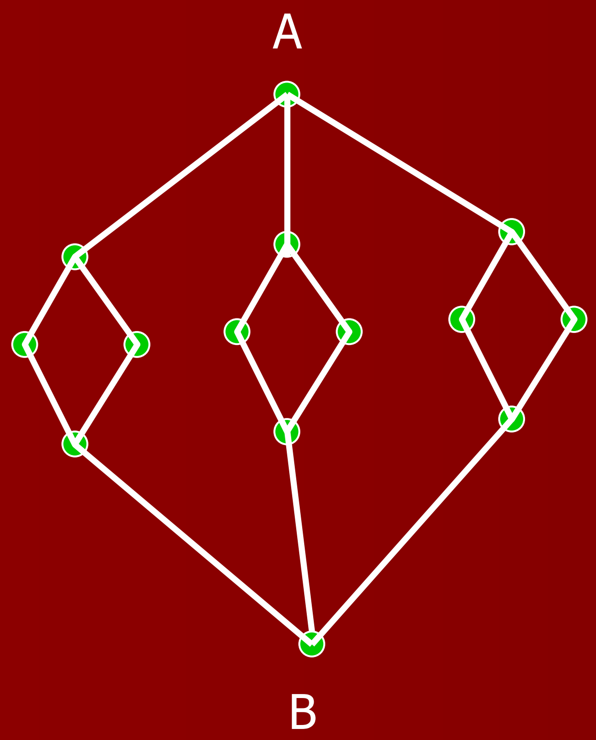


A gráf csúcsainak a száma n=8

Vegyük észre, hogy a csúcsok fokszáma minden esetben
3 < 8/2=4.

Tehát Dirac-tétele értlmében, van a gráfban Hamilton-kör, így van Hamilton út is.

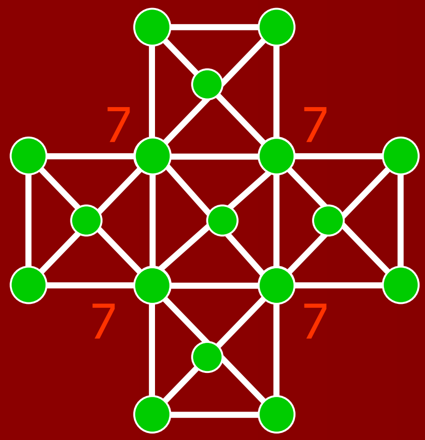




Vegyük észre, hogy van olyan 2 pont, amelyet ha elhagyunk, a gráf 2-nél több részre esik szét.

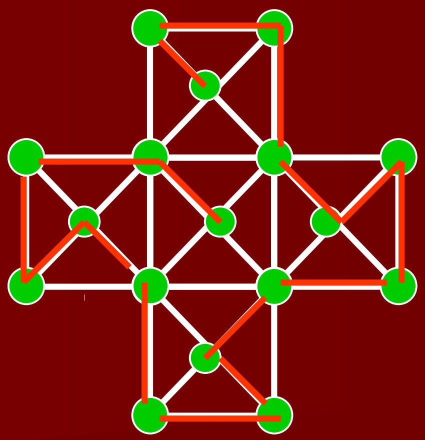
Ez a 2 pont az A és a B pontok.

Tehát nem létezik Hamilton-kör



Vegyük észre, hogy ha a 4 darab 7-ed fokú pontot elhagyjuk, akkor a gráf 5 komponensre esik szét.

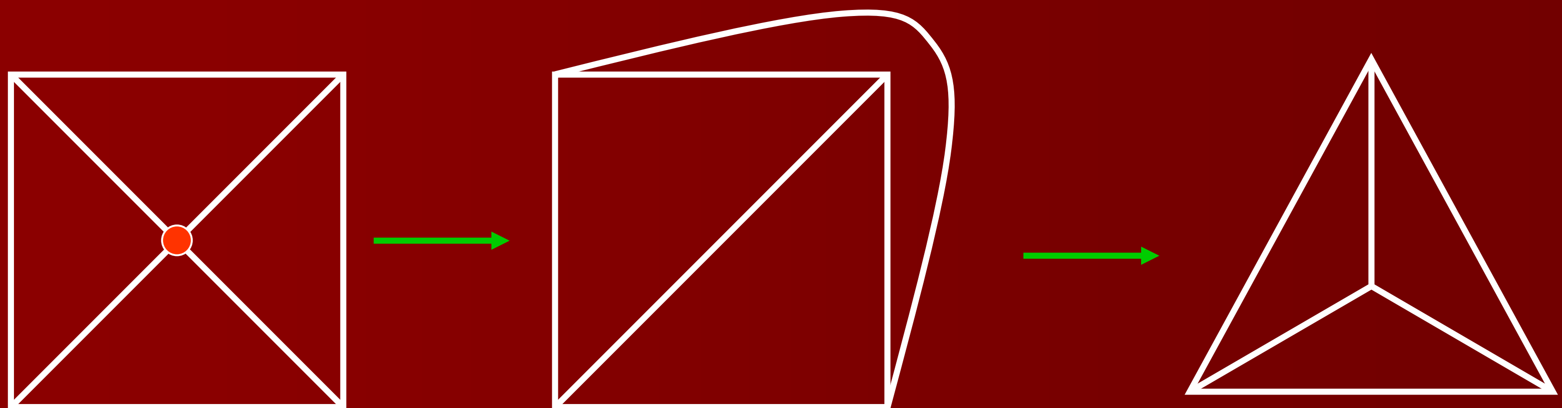
Tehát a gráfban nem létezik Hamilton-kör



Hamilton-kör nem létezik, ellenben létezik Hamilton-út.

Síkgráfok

Egy gráfot síkgráfnak (síkba rajzolható gráfnak) nevezünk, ha az éleinek nincsen - a végpontoktól különböző – közös pontjuk (vagyis az élei nem metszik egymást).



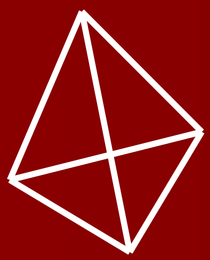
Nem síkgráf   Átalakítva síkgráfnak   Élei egyenes szakaszok

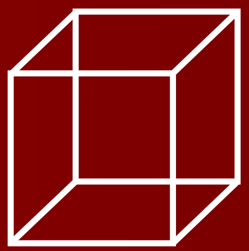
Az előző gráfok úgymond egymással IZOMORF gráfok

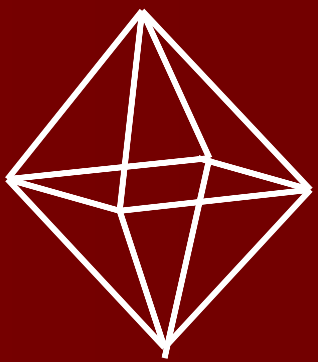
<u>Fáry-Wagner tétel</u>: Ha G egy síkbarajzolható gráf, akkor létezik olyan síkbarajzolása amelyben minden él egyenes szakasz.

Síkgráfok

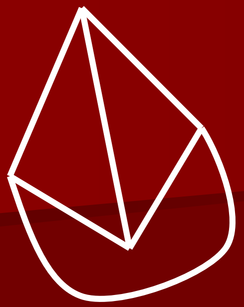
Szerkesszük meg a tetraéder, a kocka és az oktaéder élvázaival izomorf síkgráfokat!

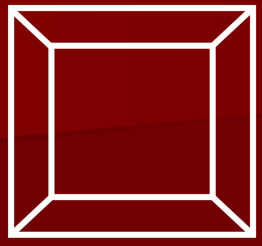


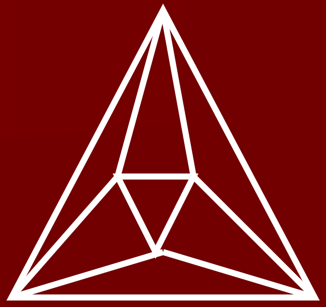




Ezeknek egy-egy síkgráfja rendre a következő:

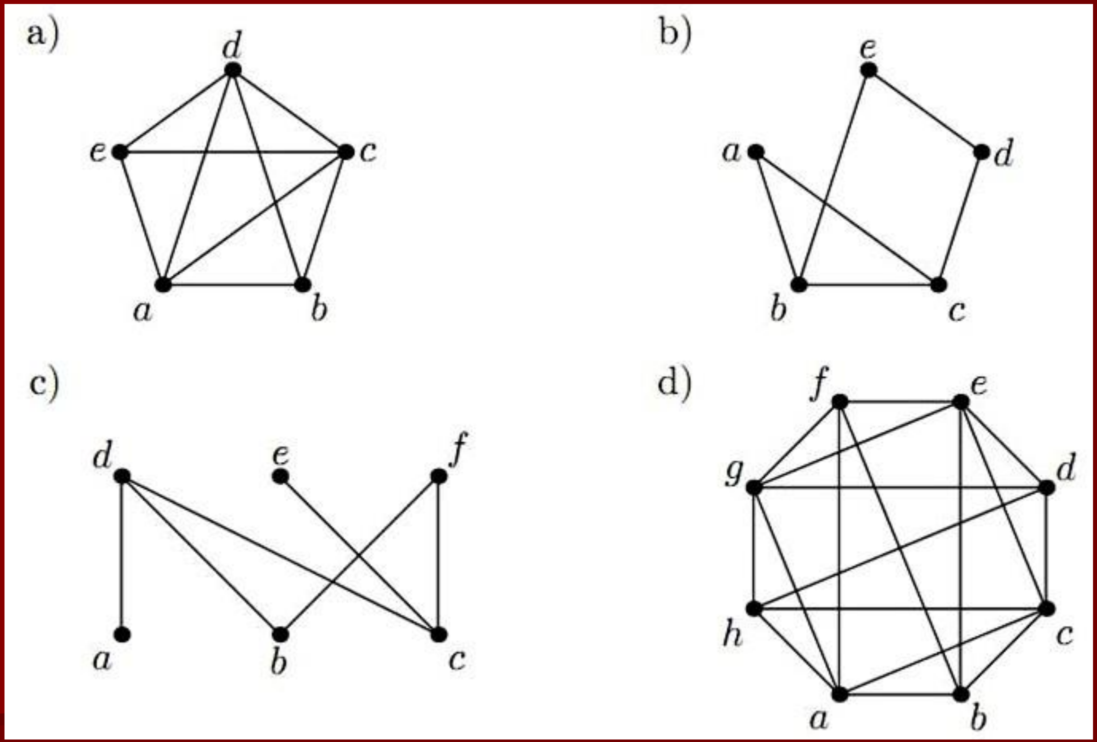






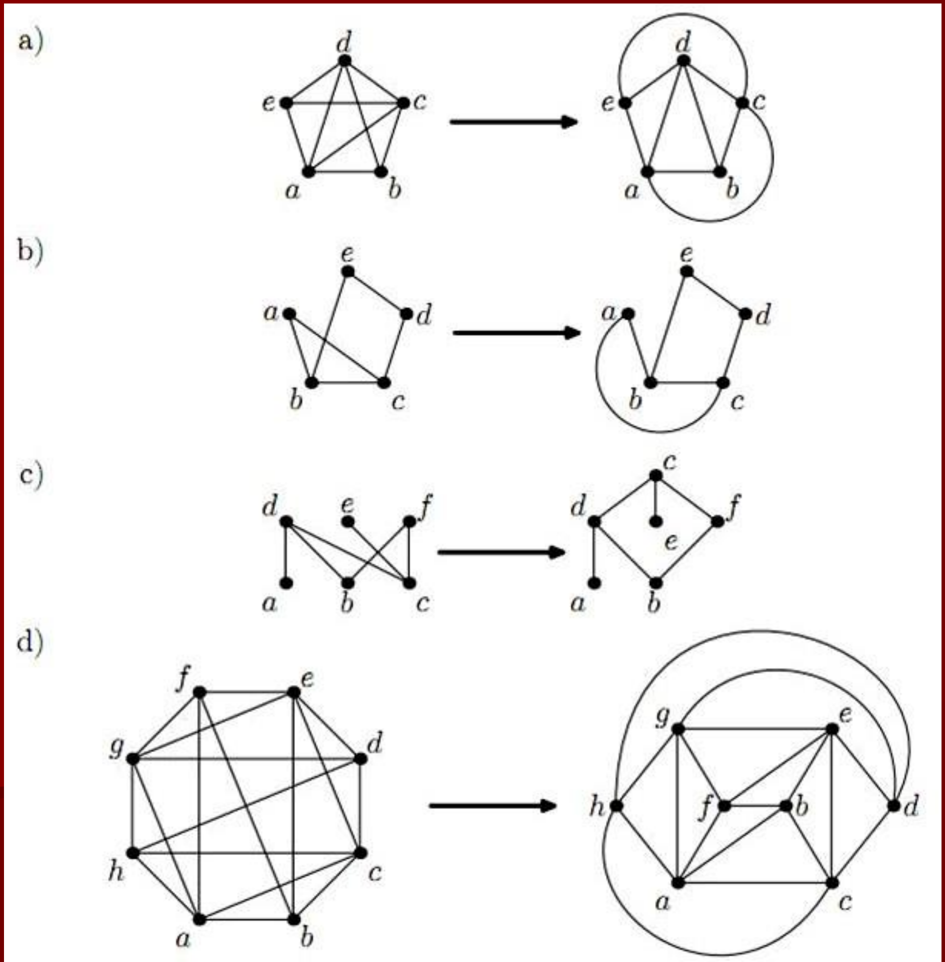
Síkgráfok

Rajzoljuk meg a következő gráfokkal izomorf síkgráfokat!



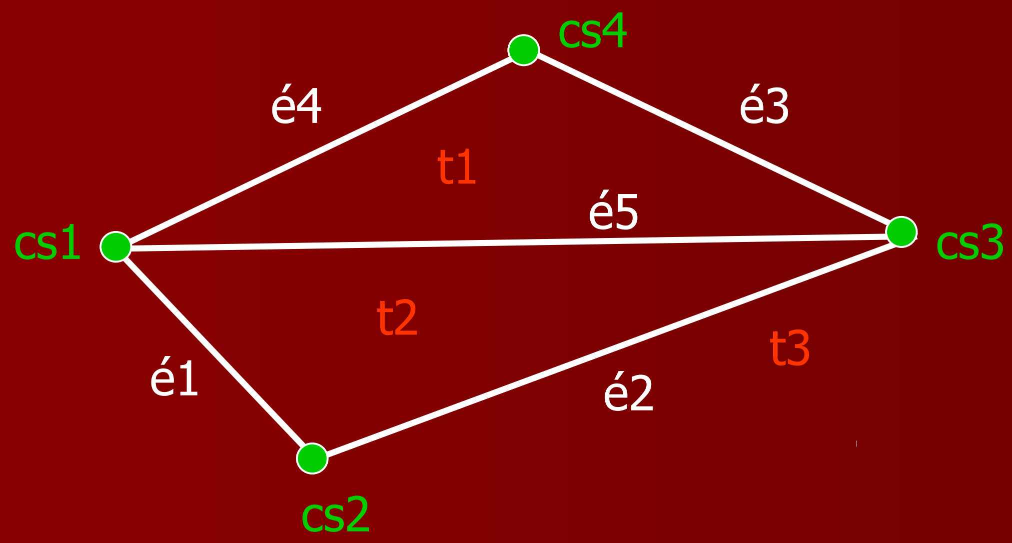
Síkgráfok

Gráf, és vele izomorf síkgráf:



Síkgráfok

Euler-formula: Egy G síkgráfban legyen ***cs*** a csúcsainak, ***é*** az éleinet, ***t*** a síktartományoknak a száma. Ekkor érvényes a következő összefüggés: ***cs+ t= é+ 2***



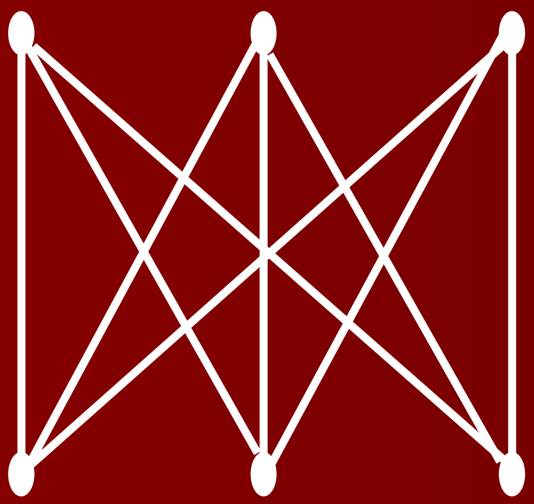
cs= 4 t= 3 é=5 tehát cs+ t= é+ 2 ⇔ **4+3= 5+ 2**

Az Euler-formula egy szükséges feltétel ahhoz, hogy a gráf síkbarajzolható legyen.

Síkgráfok

A három ház – három kút problémája

Miért nem lehet úgy összekötni 3 házat és 3 kutat úgy, hogy minden házat minden kúttal egy úttal kötünk össze, és az így keletkező utak nem keresztezhetik egymást?



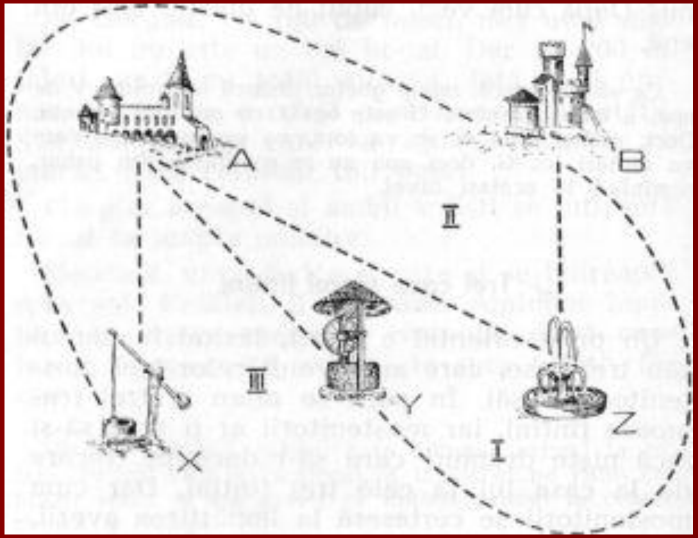
$K_{3,3}$

Próbálkozzunk a síkbarajzolhatósággal!

Előbb próbálkozzunk csak 2 házzal és 3 kúttal!

Síkgráfok

Könnyen látható, hogy két házat összekötve egymással és két kúttal, a síkot legalább 3 részre osztják (legyenek I, II, III). Ezért, akárhol is lenne a harmadik kastély, a kúthoz vezető harmadik út, biztosan metszeni fogja az előbbi két út valamelyikét.

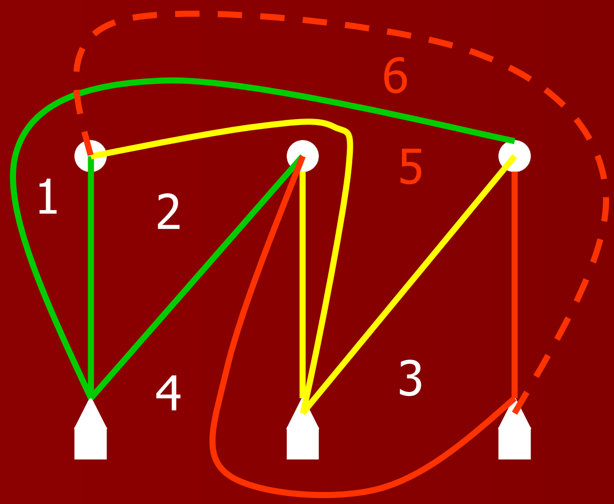


Próbáljuk ezt bizonyítani is!

Síkgráfok

Ha síkgráf lenne, akkor kellene teljesüljön az Euler-formula: ***cs+ t= é+ 2***

Először is a 6 pontot úgy kötjük össze, hogy csak 8 élt rajzolunk meg, és ezek ne keresztezzék egymást!.



Ez egy síkgráf, tehát igaz kell legyen az Euler-formula: cs=6, t=4, é=8.

Tehát 6+4=8+2 (*)

Rajzoljuk meg a 9. élet is. Így még legalább 2 tartomány keletkezik (biztosan egyiket kettéosztja, meg egy új), és 1 vonallal több.

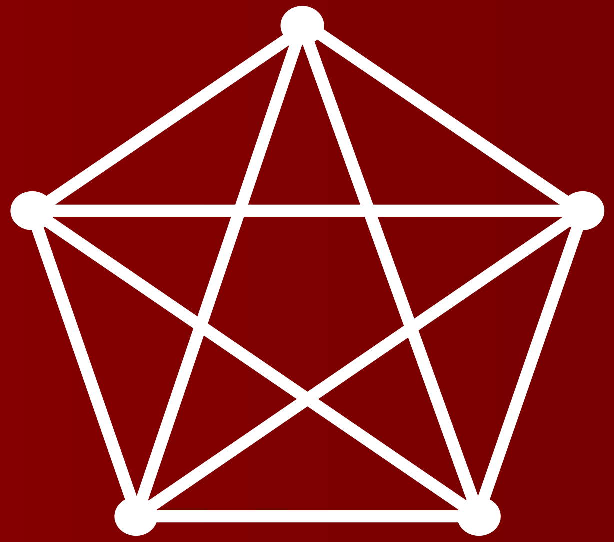
De ekkor a (*) egyenlet elromlik, mert a baloldal 2-vel, a jobboldal csak 1-gyel növekszik.Tehát a gráf nem lehet síkgráf!

Ezt a gráfot K3,3 szimbólummal jelölik.

Síkgráfok

Az öt ház probléma

Miért nem lehet 5 házba bevezetni a telefont úgy, hogy a telefonvezetékek ne keresztezzék egymást?



K_5

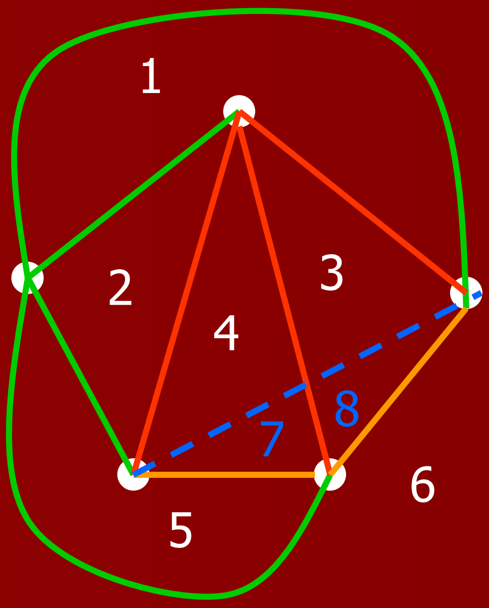
Próbálkozzunk a síkbarajzolhatósággal!

Előbb csak 9 élet rajzoljunk meg a 10-ből!

Síkgráfok

Ha síkgráf lenne, akkor kellene teljesüljön az Euler-formula: ***cs+ t= é+ 2***

Először is az 5 pontot úgy kötjük össze, hogy csak 9 élt rajzolunk meg, és ezek ne keresztezzék egymást!.



Ez egy síkgráf, tehát igaz kell legyen az Euler-formula: cs=5, t=6, é=9.

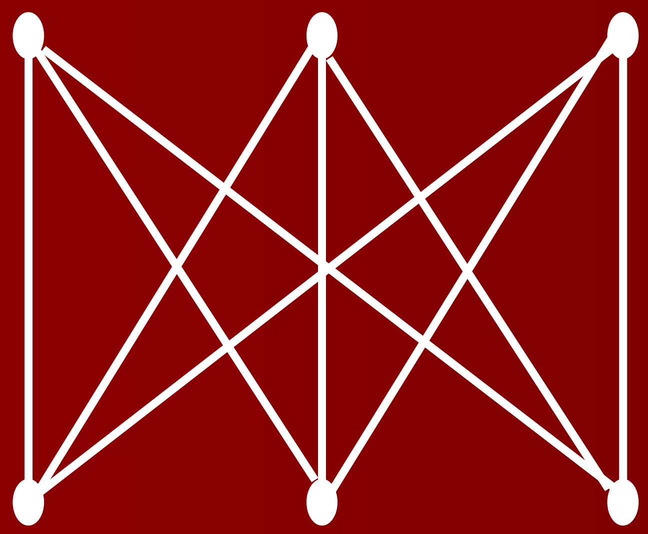
Tehát 6+5=9+2 (*)

Rajzoljuk meg a 10. élet is. Így még legalább 2 tartomány keletkezik (biztosan egyiket kettéosztja), és még 1 vonallal több lesz.

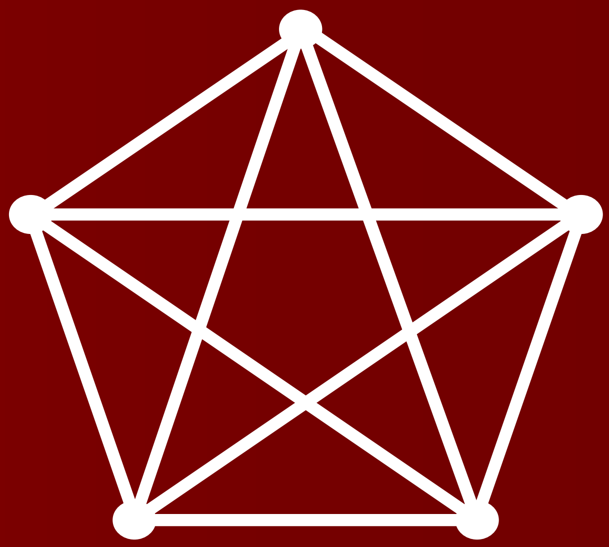
De ekkor a (*) egyenlet elromlik, mert a baloldal 2-vel, a jobboldal csak 1-gyel növekszik. Tehát a gráf nem lehet síkgráf!

Ezt a gráfot K5 szimbólummal jelölik.

Kuratowski-tétel:
Egy *G* gráf akkor és csak akkor síkbarajzolható, ha nem tartalmaz *K3,3* - al vagy *K5* - el topologikusan izomorf részgráfot.



$K_{3,3}$

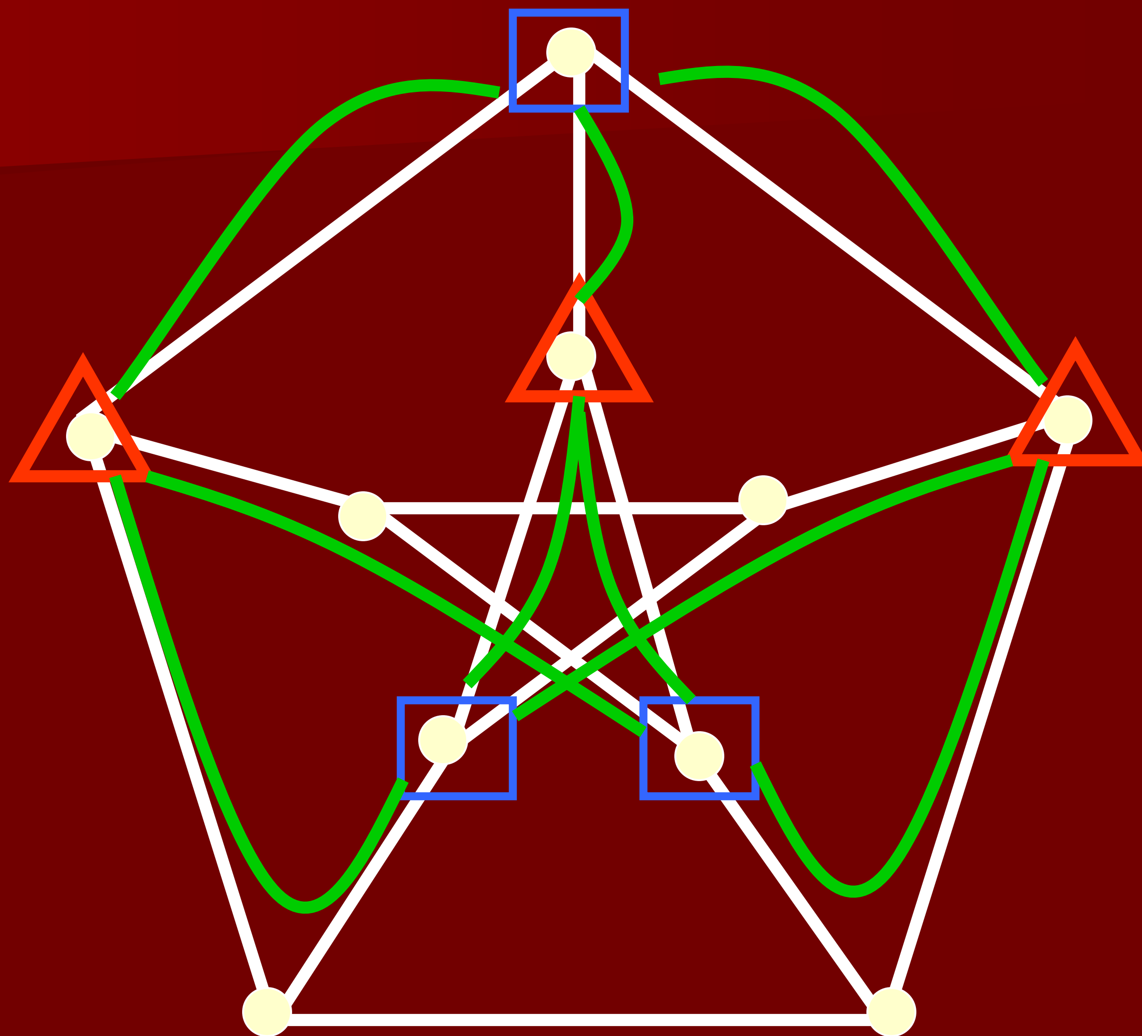


K_5

K3,3 : három ház-három kút problémája,

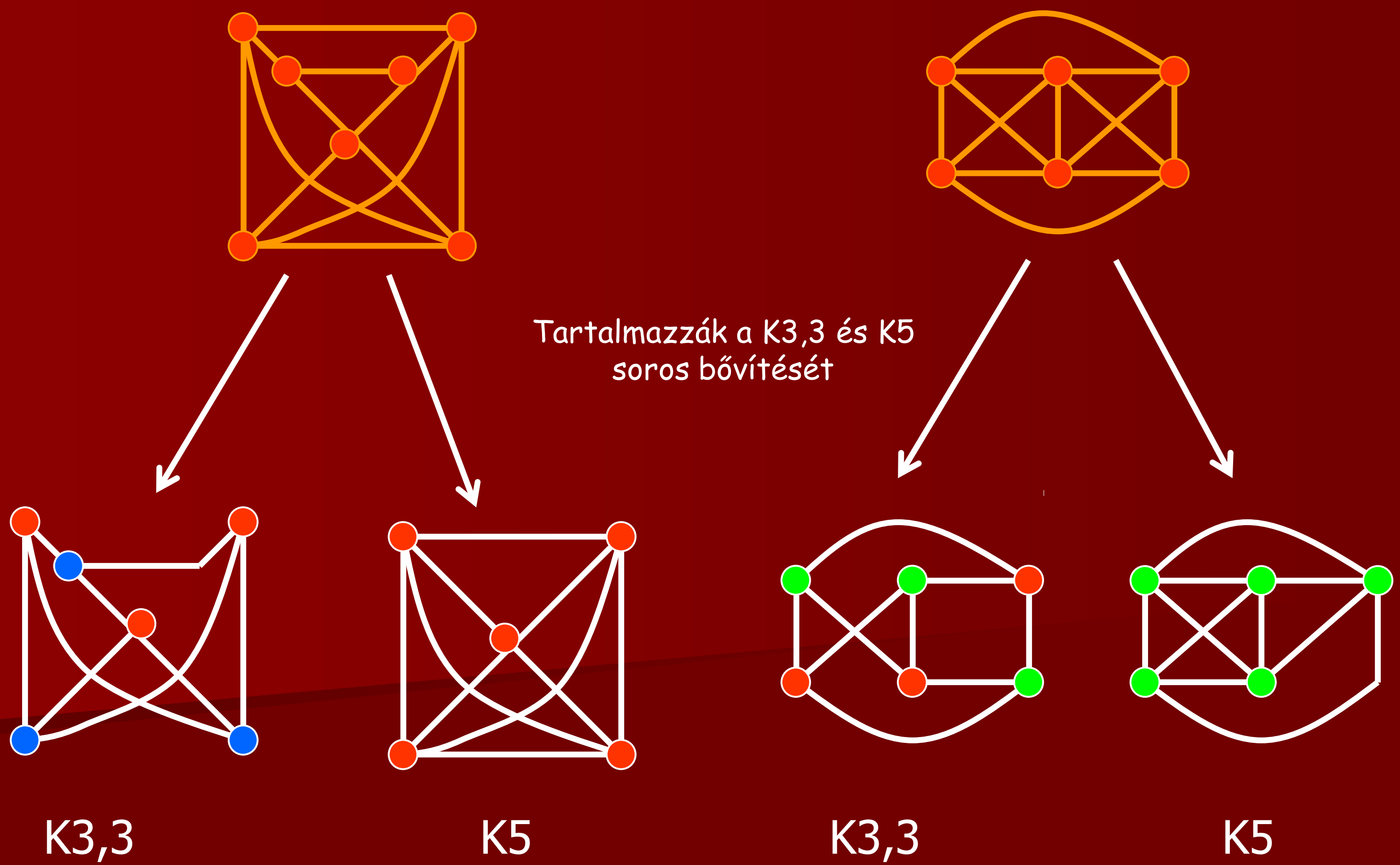
K5: az öt város problémája

A Petersen-gráf nem síkbarajzolható, mert megtalálható benne a K3,3 továbbosztása



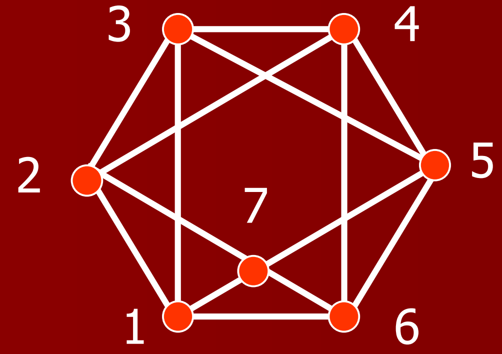
Síkgráfok

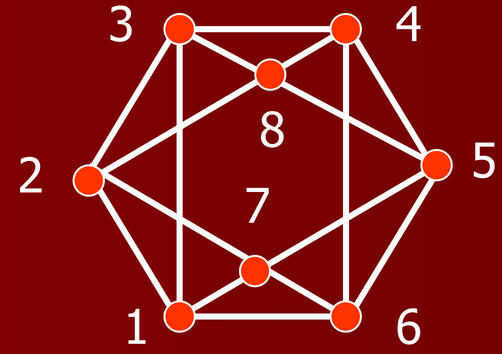
Igazoljuk, hogy a következő gráfok nem síkbarajzolhatók:



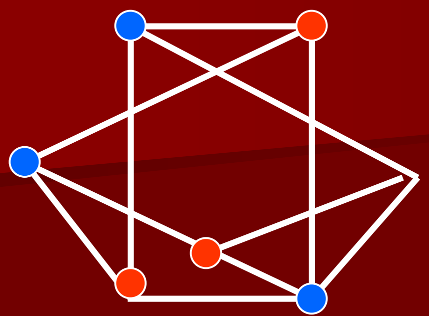
Síkgráfok

Válasszuk ki, hogy a következő gráfok közül melyik síkbarajzolható, és rajzoljuk is meg a síkban egyenes szakaszokkal!

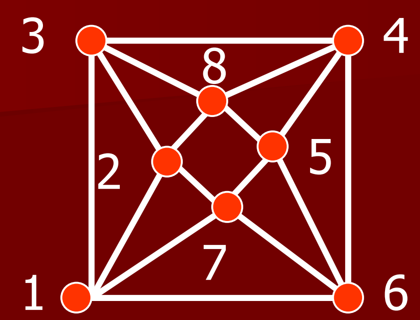




Előbb rajzoljuk meg görbe vonalakkal, aztán egyenes szakaszokkal!

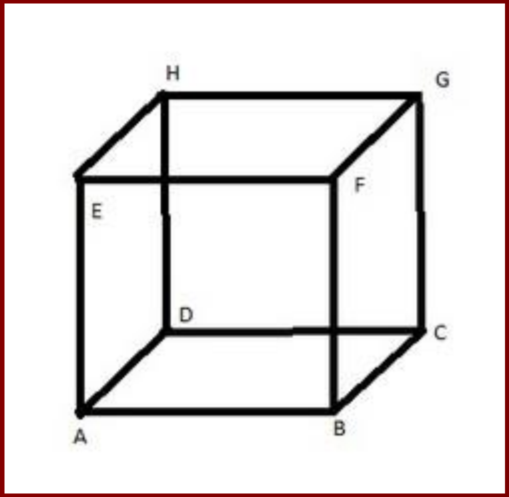


K3,3



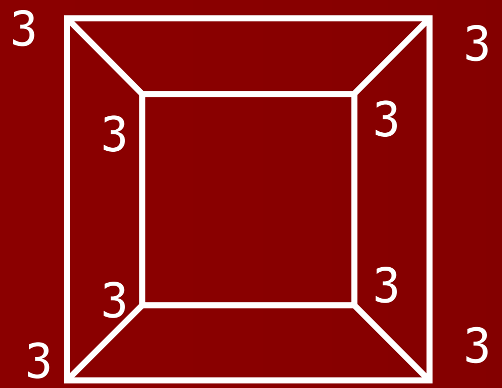
Javasolt feladatok

1. feladat: Egy 12 dm hosszú drótszálból 1 dm élű kocka élvázát kell elkészítenünk. Legfeljebb hány kockaél alakítható ki úgy, hogy közben nem vágjuk el a drótot?



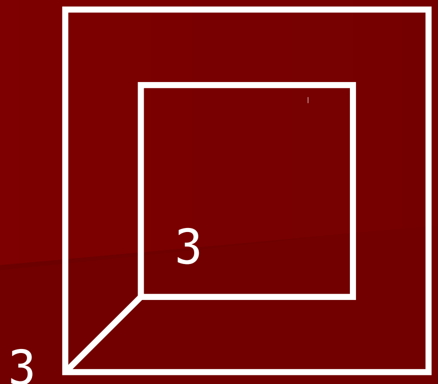
Megoldás

A kocka élvázával izomorf gráf a következő:



A páratlan fokszámú csúcsok száma: 8=2×4, vagyis k=4.

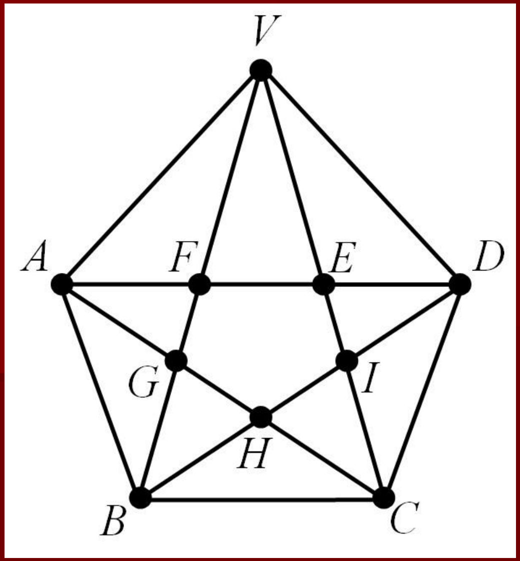
Tehát k-1= 3 él nem rajzolható meg, a többi igen, nyílt Euler úttal.



Vagyis a kockának 3 éle nem alakítható ki.

Javasolt feladatok

2. feladat: A következő ábrán egy buszhálózat tervrajza látható: az autóbusz a *V* ponttal jelölt végállomástól indul, megállói az *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H* és *I* pontban vannak. Az egyes megállók közötti útvonalakat az őket összekötő szakaszok összessége jelzi. Lehetséges-e, hogy az autóbusz a *V* pontból induljon, és így haladjon át minden megállón, hogy a jelzett utak mindegyikén egyszer és csak egyszer áthaladva visszajusson a *V* pontba?

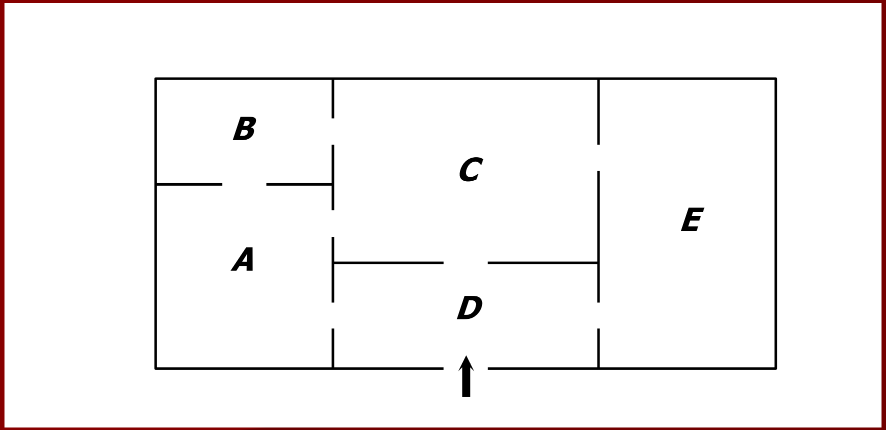


Megoldás

Igen, mert minden csúcs fokszáma páros,
ezért a gráfban van Euler-kör.

Javasolt feladatok

3. feladat: A Kovács család az alábbi ábrán feltüntetett alaprajzú lakást szeretné megvásárolni. A lakás D helyiségébe, a nyíllal jelölt bejárati ajtón lép be. A lakás melyik helyiségében tartózkodik most, ha mindegyik ajtón pontosan egyszer halad át?

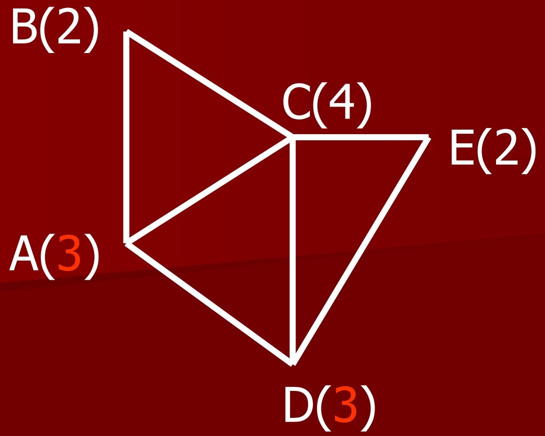


Megoldás

Olyan helyiségben nem tartózkodhat, amelynek páros számú ajtaja van, mert akárhányszor ment is be oda, ki is kellett jönnie.

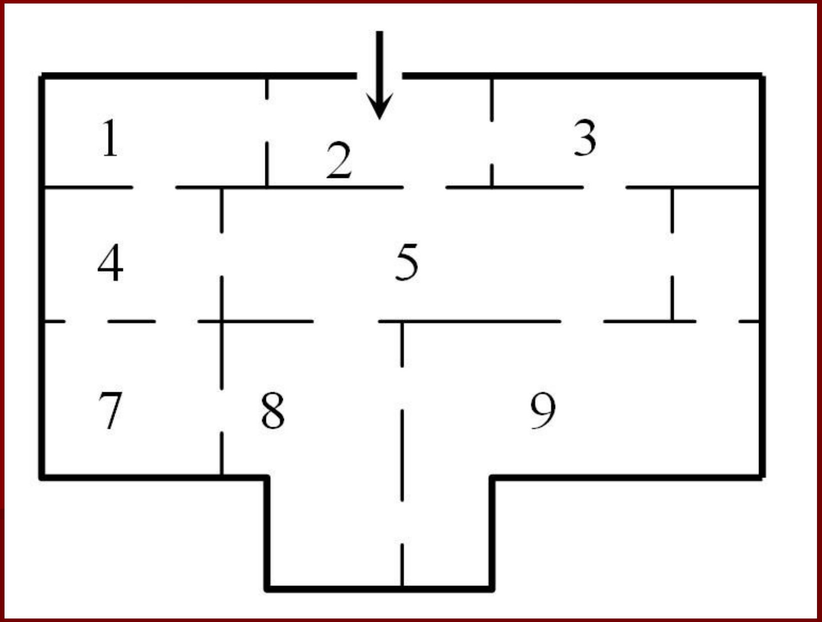
Csak az *A* szobának van páratlan számú ajtaja, ezért csak itt tartózkodhat.

Elkészítve a séta gráfját, mivel csak 2 csúcs fokszáma páratlan, a D-ből indult, minden élen egyszer haladt át, tehát az *A*-ban kell legyen.



Javasolt feladatok

4. feladat: Süsü minden délután belép a palotába a nyíllal jelölt bejáraton, majd végigjárja a palota 9 termét úgy, hogy közben minden ajtón egyszer megy át. Sétája végeztével leül a gyermekszobában, és mesét mond a kis királyfinak. Hányas szám jelöli a gyermekszobát?



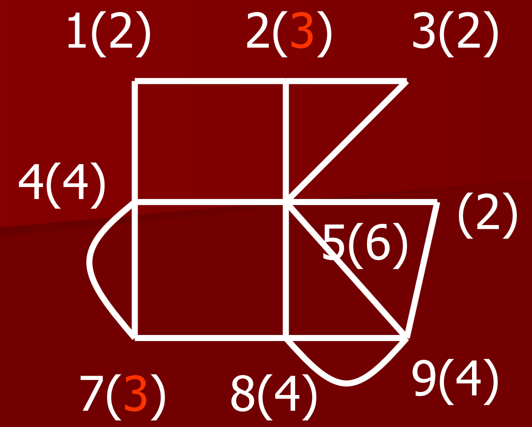
Megoldás

A 7-es szoba kivételével minden szobának páros számú ajtaja van, a 7-esnek három. Ha Süsü minden ajtón egyszer megy át, akkor nem maradhat azokban a szobákban, amelyeknek páros számú ajtajuk van. Két lehetséges útvonalat is megadunk, de mindenképpen a 7-es szobában fejezi be az útját. Tehát ez a gyerekszoba.

2 – 1 – 4 – 7 – 4 – 5 – 2 – 3 – 5 – 6 – 9 – 5 – 8 – 9 – 8 – 7

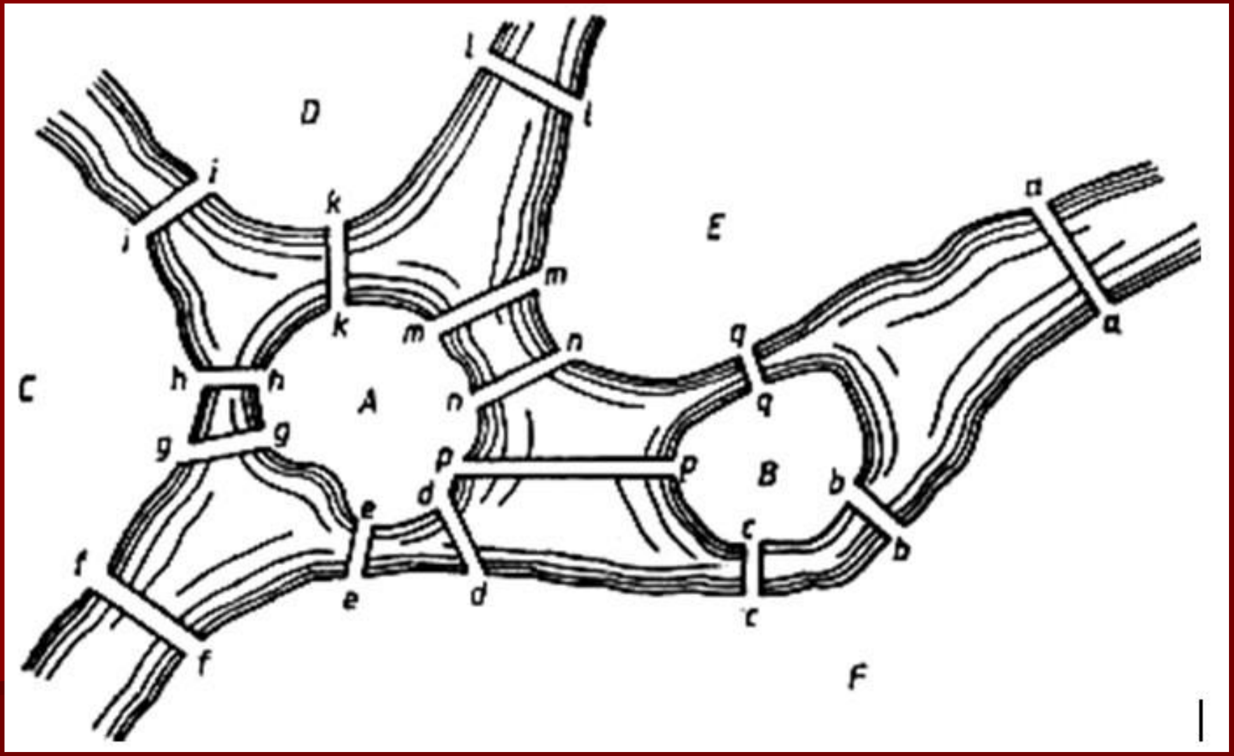
vagy

2 – 3 – 5 – 6 – 9 – 5 – 8 – 9 – 8 – 7 – 4 – 1 – 2 – 5 – 4 – 7



Javasolt feladatok

5. feladat: Két szigetet az alábbi ábrán látható módon 15 híd köt össze egymással és a parttal. Bejárható-e a 15 híd úgy, hogy mindegyiken pontosan egyszer haladjunk át?

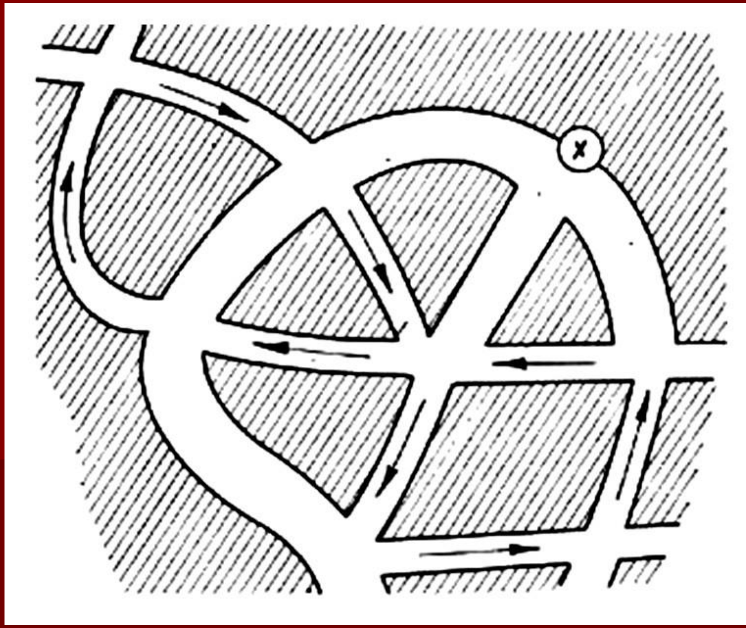


Megoldás

Ha az *A*, *B*, *C*, *D*, *E* és *F* szárazföldeket egy gráf csúcsainak, az *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *i*, *k*, *l*, *m*, *n*, *p* és *q* hidakat egy gráf éleinek tekintjük, láthatjuk, hogy minden csúcs fokszáma páros, kivéve a *D* és az *E* csúcsot, melyek fokszáma páratlan. Így Euler 2. tétele értelmében létezik nyílt Euler-út. Egy ilyen út az [*abcdefghikmnpqt*].

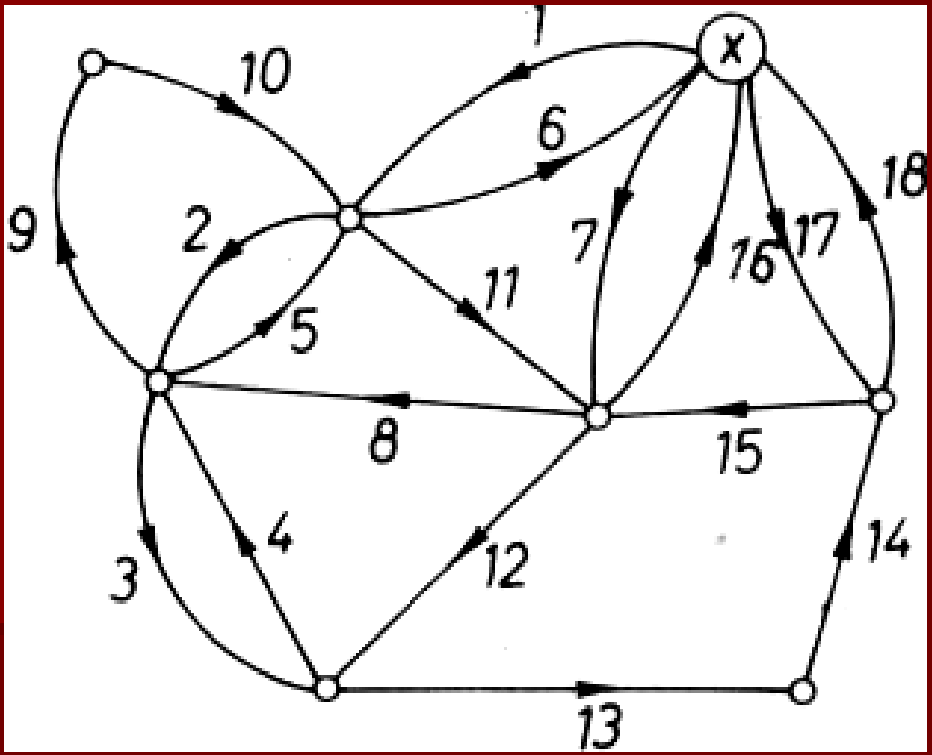
Javasolt feladatok

6. feladat: A mellékelt ábrán látható városrész utcahálózatát egyetlen öntözőkocsinak kell végiglocsolnia. A kocsinak az X pontból kell indulnia és oda kell visszatérnie. A nyíllal jelölt utcákon a nyíl irányában egyirányú a forgalom. Egyirányú utcákon egyszer kell végighaladni, azonban a kétirányú utcák mindkét oldalát be kell járni. Az útkereszteződésekben kanyarodási korlátok nincsenek. Készítsünk gazdaságos bejárási tervet a kocsi számára !



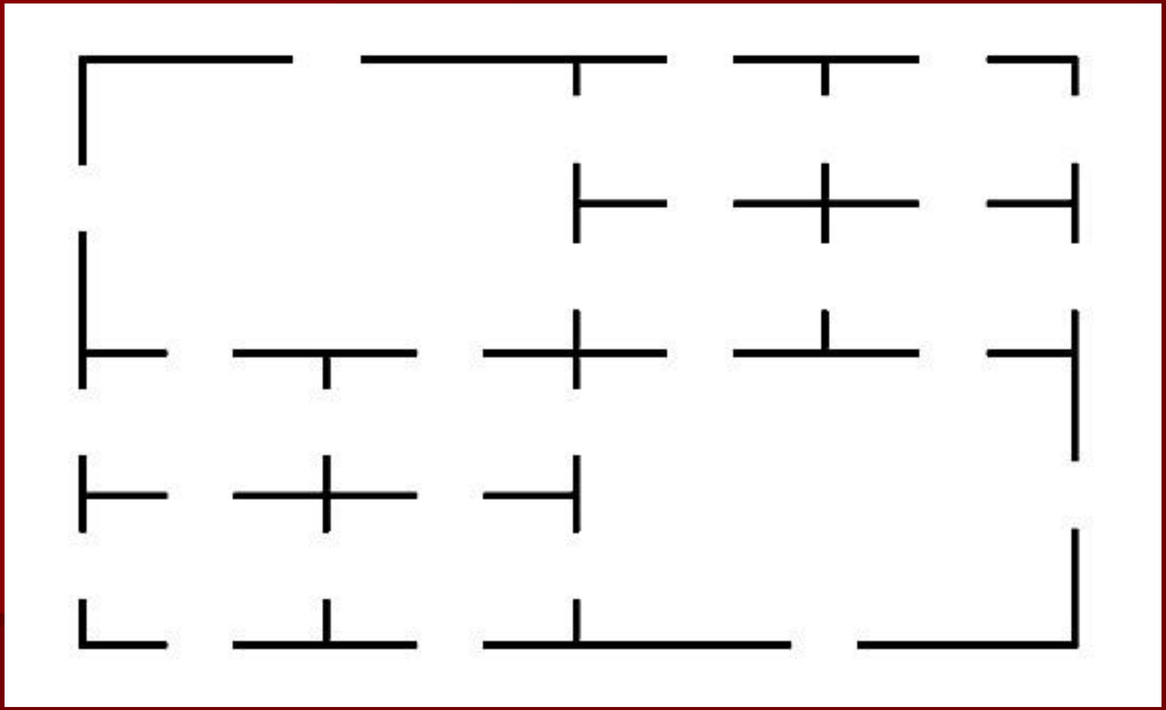
Megoldás

Mivel a gráf minden fokszáma páros, ezért Euler-gráf, tehát a kért bejárás elvégezhető. Az ábrán 1-től 18-ig számozva a bejárási sorrendet jelöltük meg.



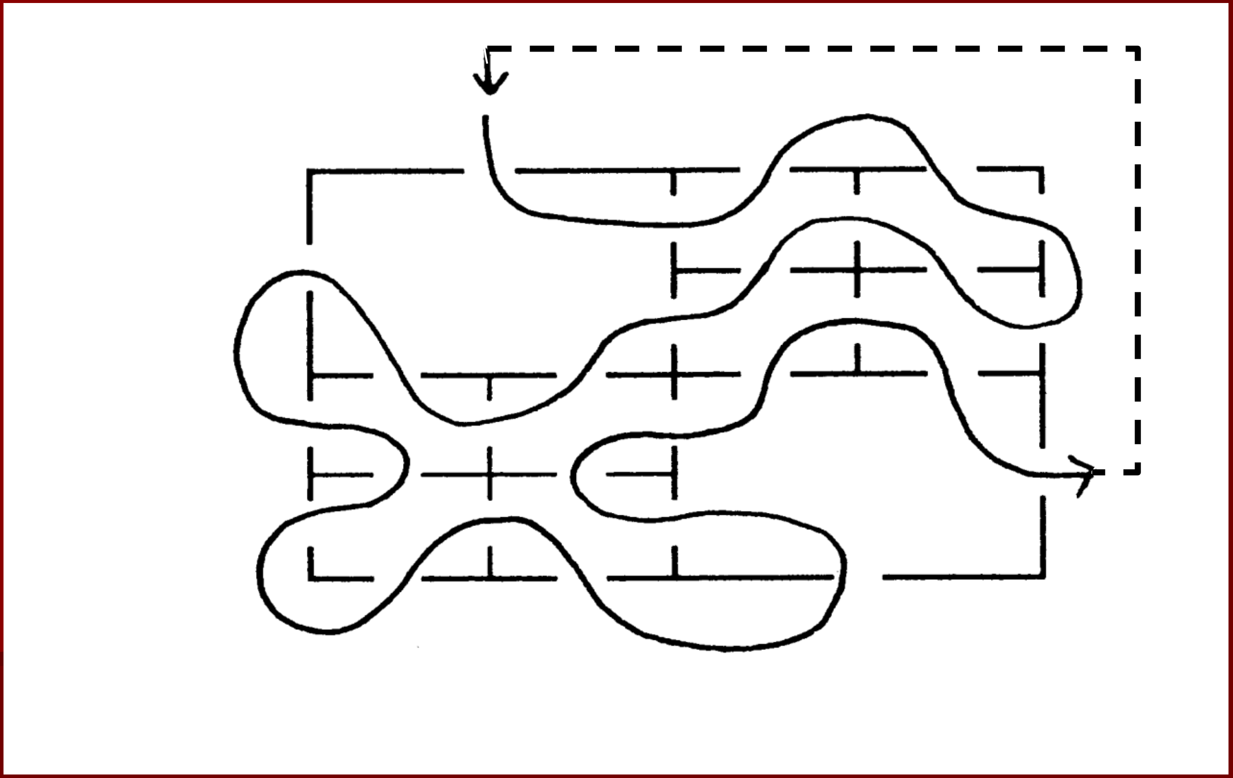
Javasolt feladatok

7. feladat: A mellékelt rajzon egy épület alaprajza látható. Feladatunk az, hogy bárhonnan is indulunk el, haladjunk végig mindegyik ajtón egyszer, és csak egyszer!



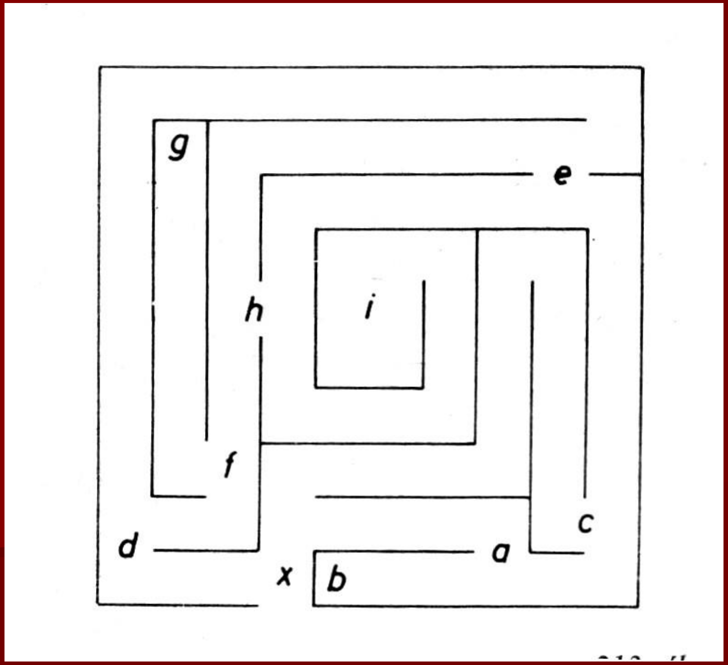
Megoldás

A feladat gráfját elkészítve, annak minden csúcsa páros fokszámú, tehát létezik benne Euler-kör.

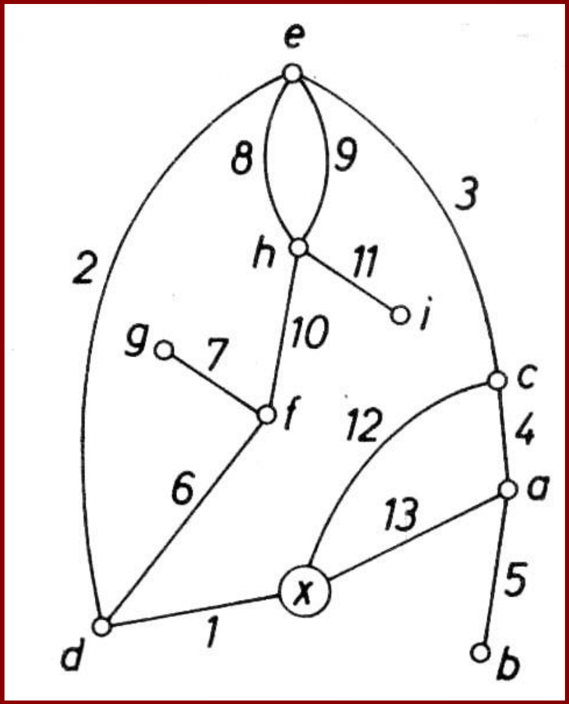


Javasolt feladatok

8. feladat: A labirintus minden folyosóját végig kell járjuk, a lehető legrövidebb úton, és az x-ből indulva, ugyancsak az x-be kell megérkezzünk.



Megoldás



A labirintusnak egy gráfja a mellékelt ábrán látható. A gráf minden élén pontosan 2-szer kell végighaladnunk, az x-ből indulva, az x-be kell érkezni.

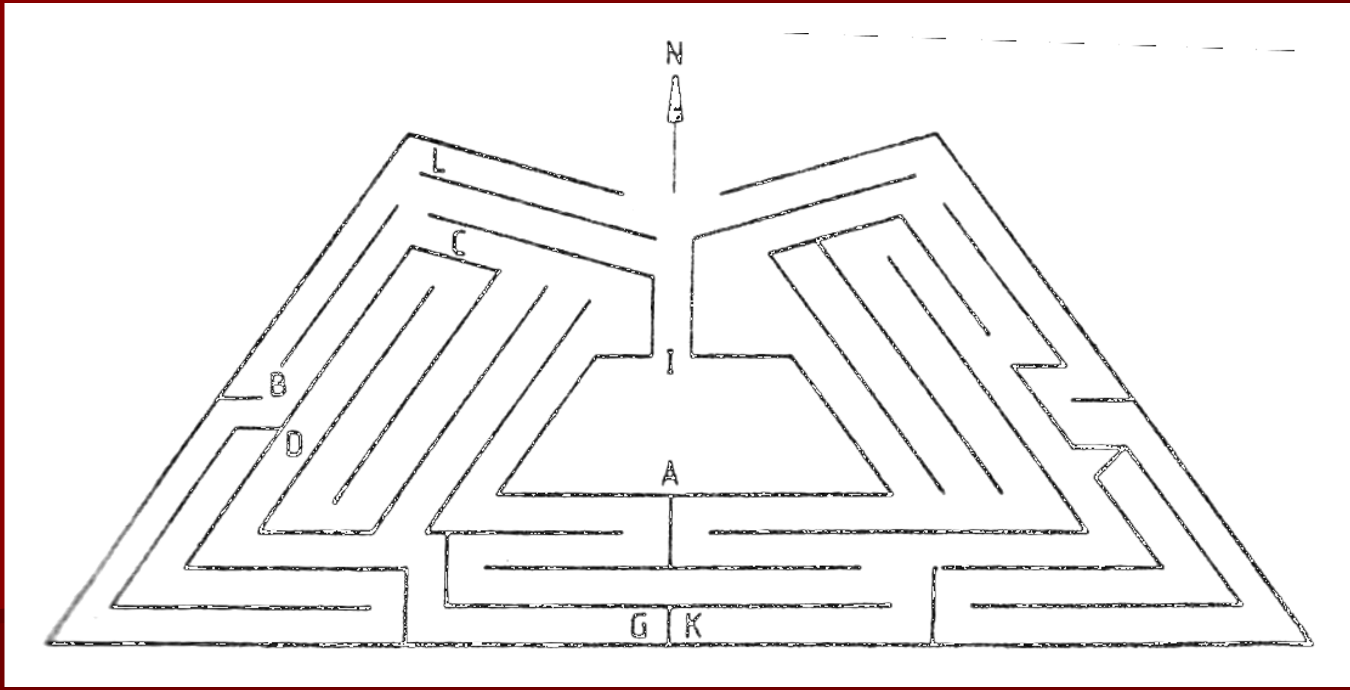
Az éleket megszámoztuk.

Egy Euler-kör a következő:

1, 2, 3, 4, 5, 5, 13, 12, 12, 13, 4, 3, 9, 10, 6, 6, 7, 7, 10, 11, 11, 8, 8, 2, 1

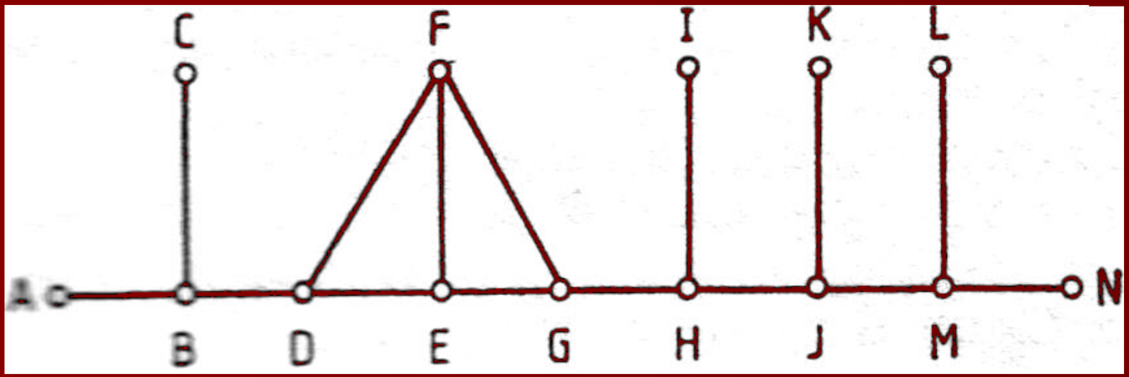
Javasolt feladatok

9. feladat: Az ábrán egy labirintus látható. Menjünk végig a labirintus minden folyosóján és térjünk vissza a kiindulási pontba, minél rövidebb úton.



Megoldás

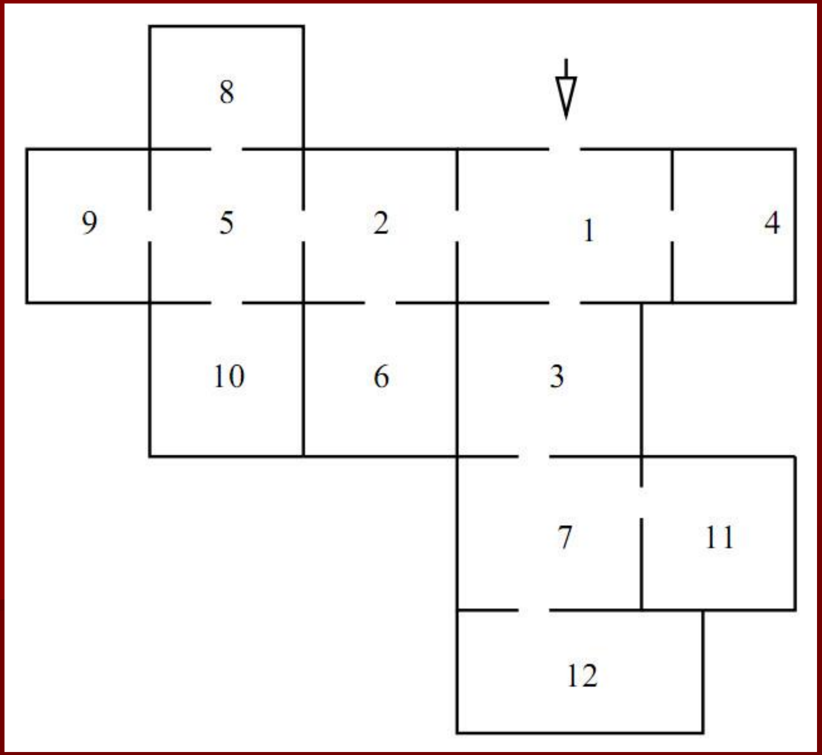
Az ábrán látható a labirintus gráfja. A „jobbkézszabály” szerint egy Euler-kör a következő:



N-M-L-M-J-K-J-H-I-H-G-F-E-F-D-B-C-B-A-B-D-E-G-H-J-M-N

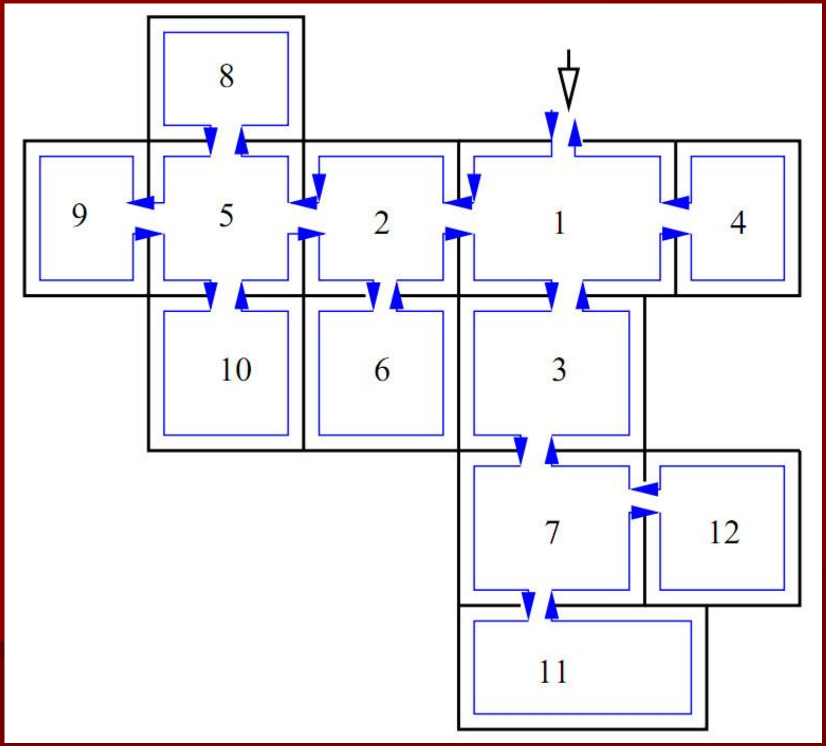
Javasolt feladatok

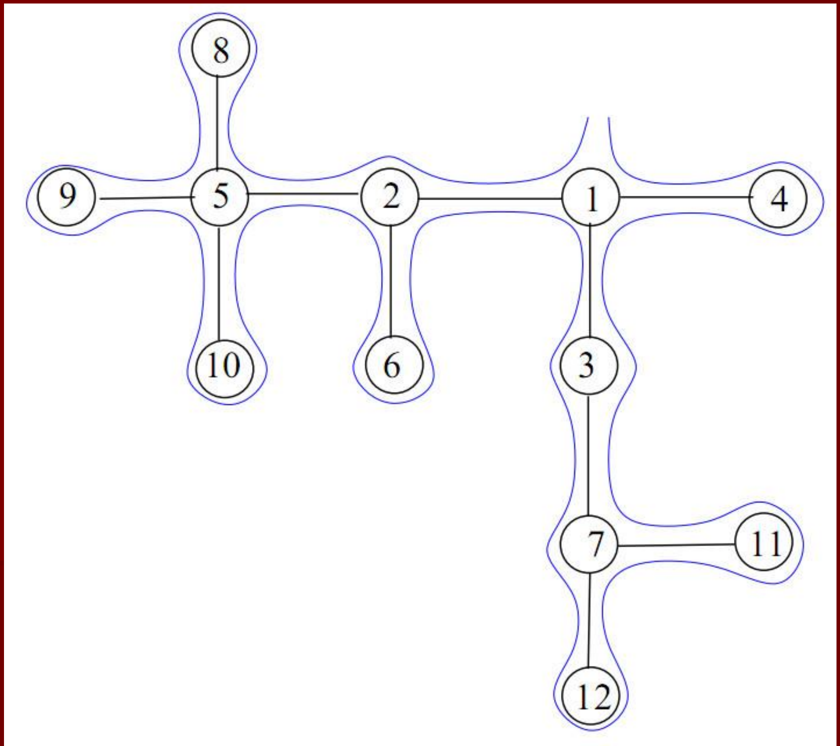
10. feladat: Egy képtárlat minden termében, minden falon meg akarjuk tekinteni a kiállított festményeket úgy, hogy a sétánk a lehető legrövidebb legyen, és visszajussunk a kiindulási pontba. Hogyan lehetséges ez?



Megoldás

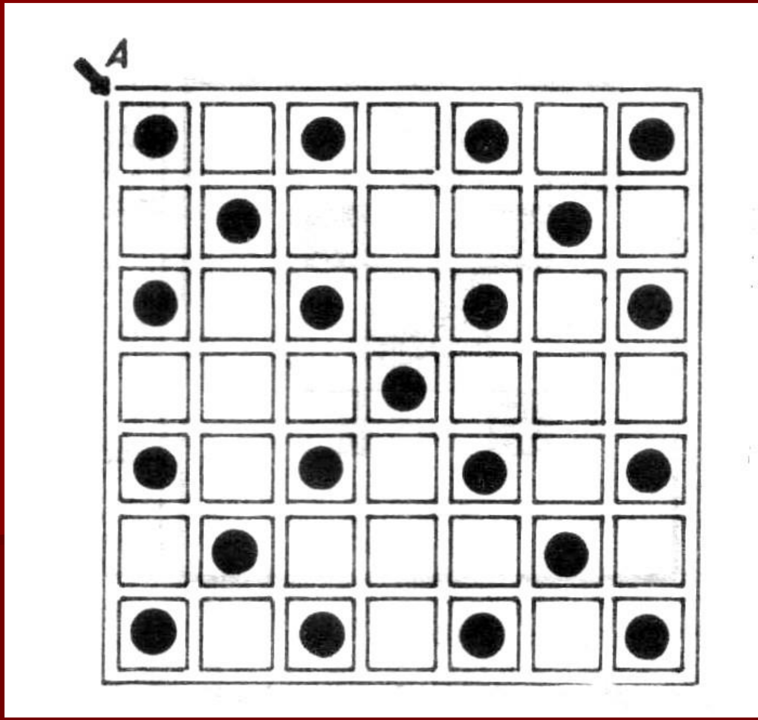
Egy ilyen sétát a „jobbkézszabály" segítségével ejtünk meg:





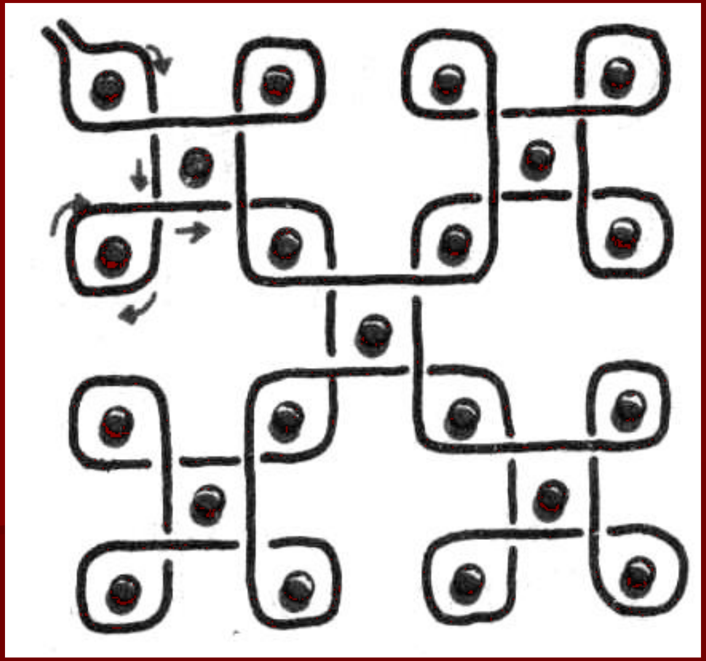
Javasolt feladatok

11. feladat: A mellékelt ábrán egy szoborpark látható (a szobrok a pöttyök). Úgy akarunk az A-ból indulni, és a látható utak mindegyikén minél rövidebben végighaladni, hogy minden szobrot körkörösen megnézzünk (de csak egyszer körbe), és visszajussunk az A bejárathoz. Az egyes járdaszakaszokon legfeljebb egyszer haladhatunk végig. Lehetséges-e egy ilyen séta?



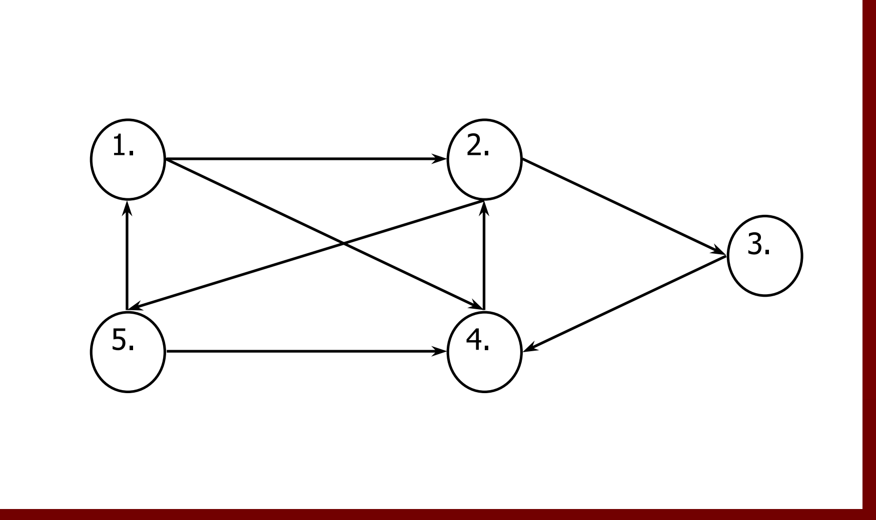
Megoldás

Igen, megvalósítható, a „jobbkézszabályt” követve egy ilyen séta (Euler-kör) az alábbi:



Javasolt feladatok

12. feladat: Egy majomcsalád az erdőben öt fán él. Két fa közötti nyíl jelentése: erről a fáról arra a fára ment a majomcsalád. A nyilak segítségével állapítsd meg, hogy hol töltötték az éjszakájukat, és jelenleg hol tartózkodnak! Indokold meg a válaszodat!



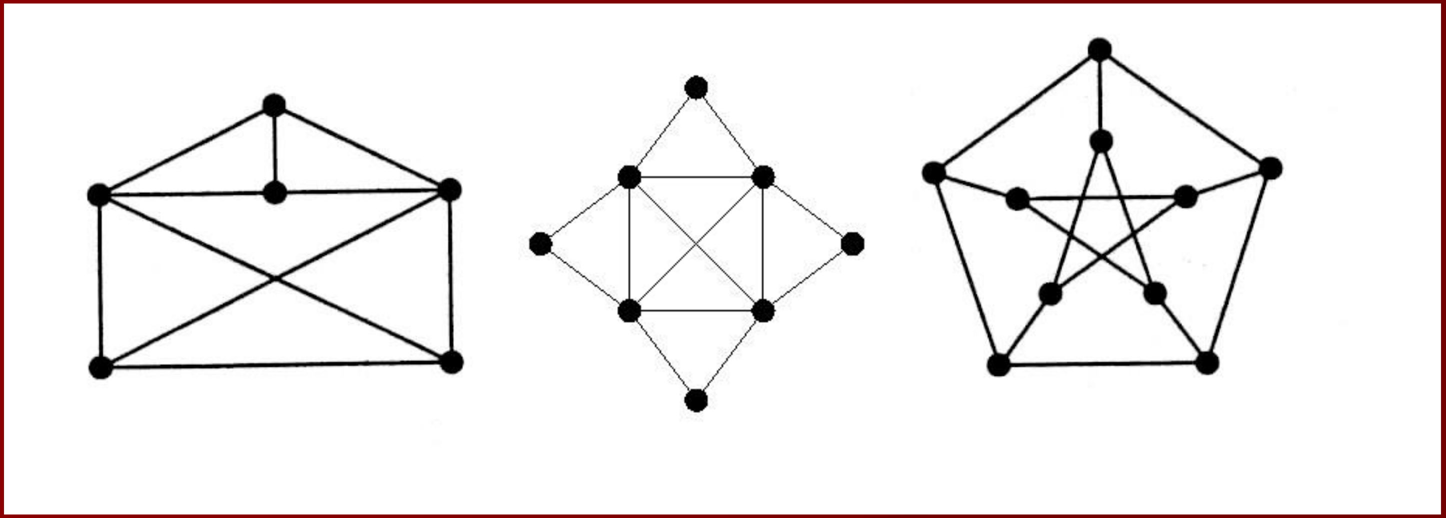
Megoldás

Ahol a bemenő nyilak száma megegyezik a kimenő nyilakéval, ott nem lehetnek, mert ahányszor az adott fára mentek, ugyanannyiszor el is hagyták azt. Most azon a fán vannak, ahol több a bemenő, mint a kimenő nyíl. Azon a fán éjszakáztak, ahol több a kimenő nyíl, mint a bemenő nyíl.

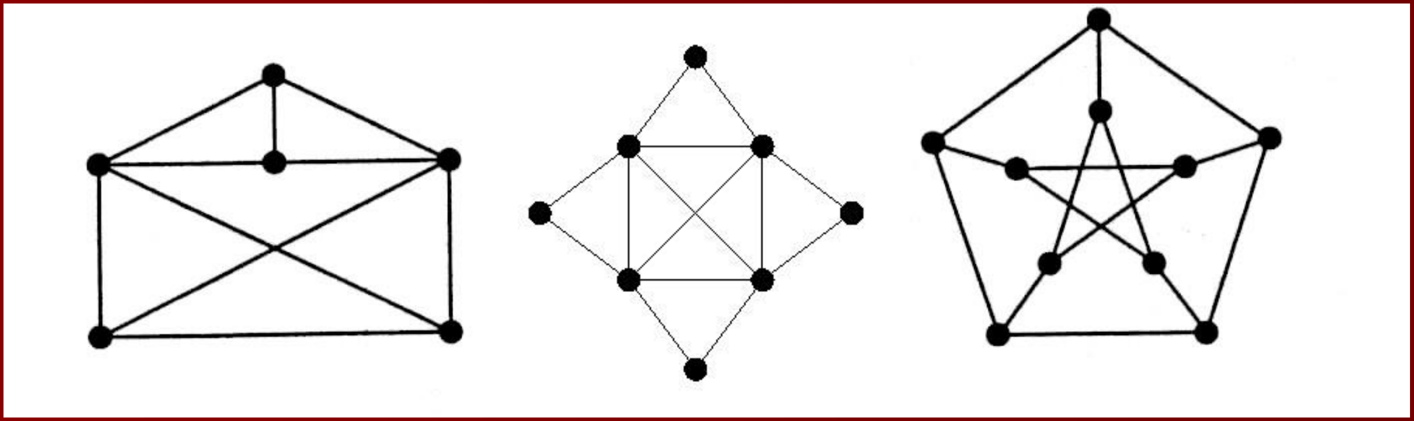
Tehát az 5. fán éjszakáztak, és most az 1. fán vannak.

Javasolt feladatok

13. feladat: Minimálisan hányszor kell felemelni a ceruzát, hogy minden élen csak egyszer haladjunk át? Maximálisan hány élt lehet lerajzolni ceruza felemelés nélkül?



Megoldás



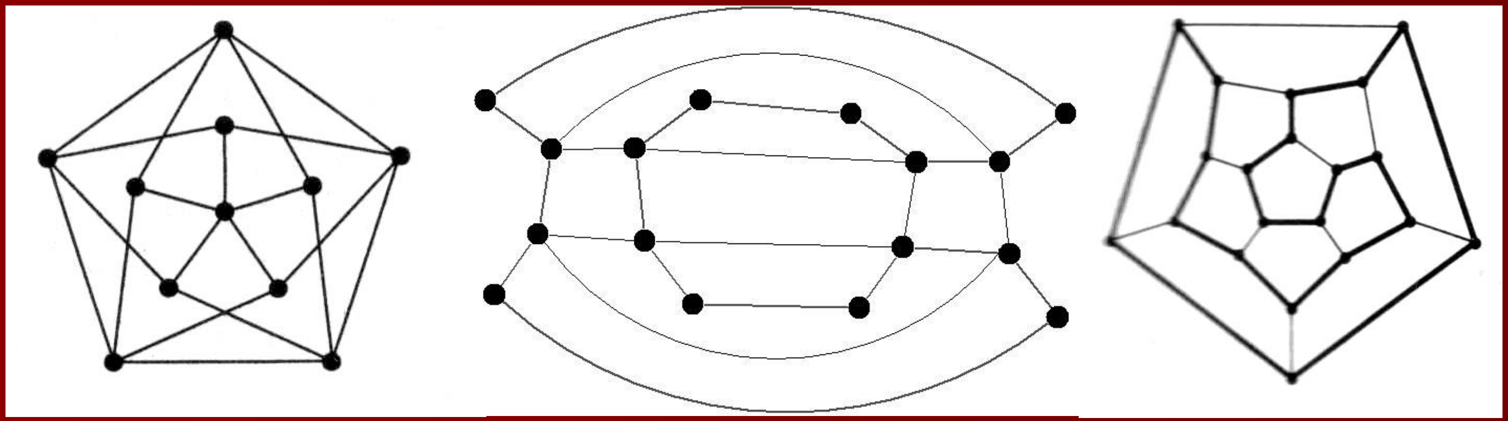
1) Az első ábrának 4=2×2 páratlan csúcsa van, ezért 2-1=1 –szer kell ceruzát felemelni. (9-1=8 él)

2) A második ábrának is 4=2×2 páratlan csúcsa van, ezért 2-1=1 –szer kell ceruzát felemelni. (14-1= 13 él)

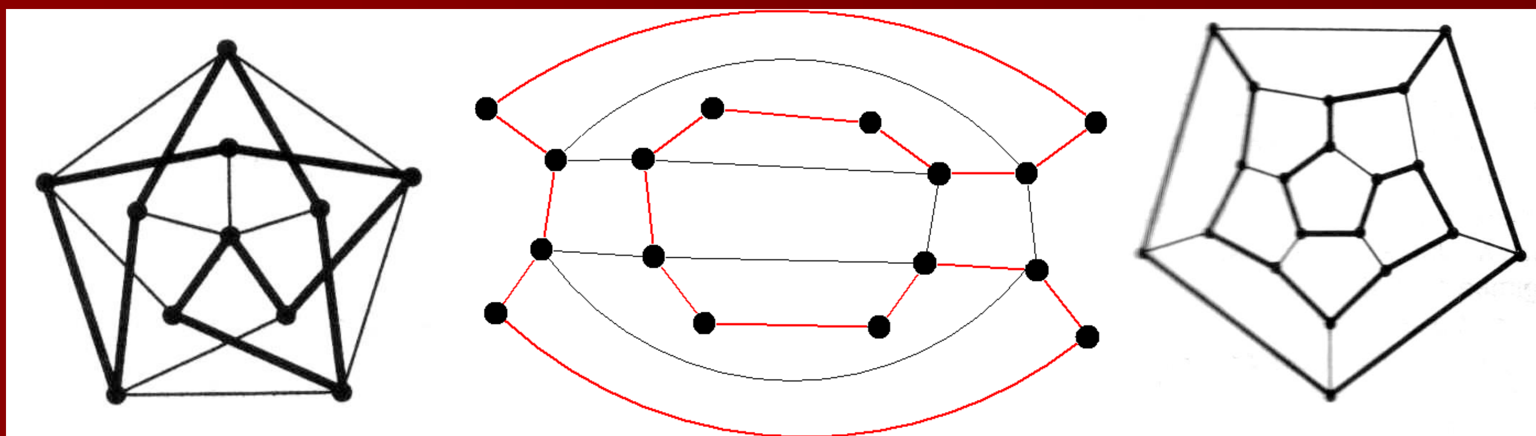
3) Az első ábrának 10=2×5 páratlan csúcsa van, ezért 5-1=4 –szer kell ceruzát felemelni. (15-4=11 él)

Javasolt feladatok

14. feladat: Rajzolj meg egy-egy Hamilton-kört a következő gráfokban.



Megoldás



Javasolt feladatok

15. feladat: A boltban vásároltunk 100 piros, 150 kék, és 200 zöld színű gyöngyöt. Bizonyítsuk be, hogy lehet olyan nyakláncot készíteni az összes gyöngy felhasználásával, amelyben az azonos színű gyöngyök nem kerülhetnek egymás mellé!

134

16. feladat: be lehet-e járni egy 3×5 méretű sakktábla összes mezőjét egy huszárral úgy, hogy minden mezőre pontosan egyszer lépjünk?

131

Megoldás

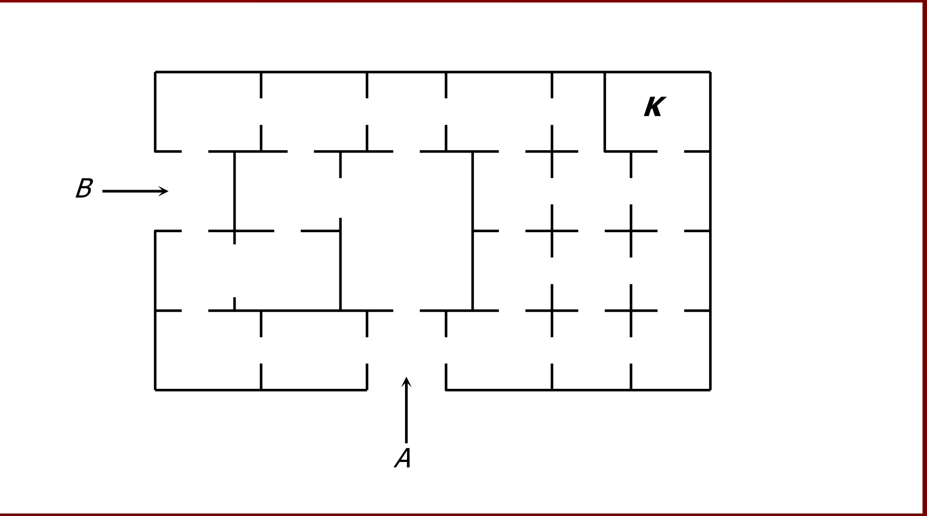
Megoldás: Tekintsünk egy 450 pontú G gráfot, melynek pontjai a gyöngyöknek felelnek meg. A G gráfban két pont akkor és csak akkor legyen szomszédos, ha a megfelelő gyöngyök eltérő színűek. Elég belátni, hogy G-ben van Hamilton-kör, mert e mentén felfűzhetőek a gyöngyök a kívánt módon. A piros gyöngyöknek megfelelő pontok foka 350, a kékeknek 300 és a zöldeknek 250, ezért minden pont foka legalább $450/2 = 225$. Így Dirac tételéből adódik, hogy G tartalmaz Hamilton-kört.

Megoldás: A G gráf csúcsait feleltessük meg a sakktábla mezőinek, továbbá két csúcsot pontosan akkor kössünk össze éllel, ha egyetlen lóugrással elérhetőek egymásból. A feladat azzal a kérdéssel ekvivalens, hogy létezik-e G-ben Hamilton-út. Az ábrán kereszttel jelölt mezőknek megfelelő öt csúcsot elhagyva a gráf hét komponensre esik szét (a komponenseknek megfelelő mezőket számok jelölik az ábrán). Így G-ben nem létezik Hamiton-út, ezért a teljes sakktábla sem járható be egy lóval.

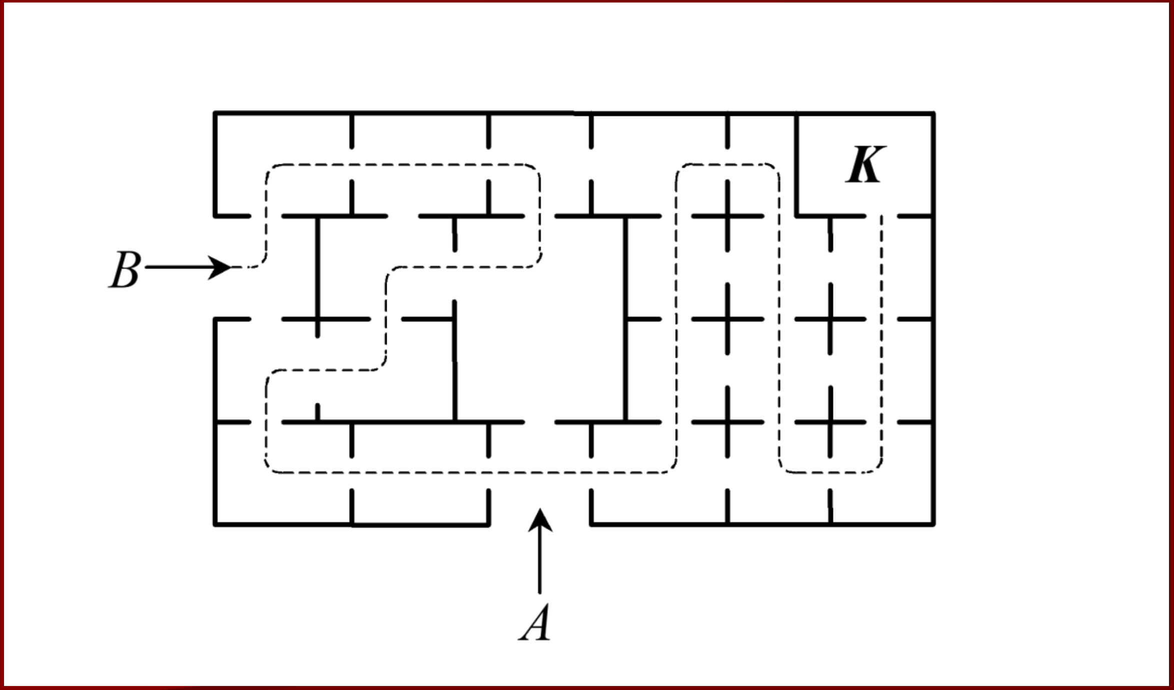
1	X	7	X	2
7	5	X	6	7
4	X	7	X	3

Javasolt feladatok

17. feladat: *A* következő rajzon egy palota alaprajza látható, amely alagsorába két bejáraton (az *A*-n és a *B*-n) keresztül lehet bejutni. A jobb felső sarokban levő *K*-val jelölt kamrában található a kincs. Lehetséges-e, hogy valamelyik bejáraton elindulva, minden szobán pontosan egyszer áthaladva eljussunk a kincshez?

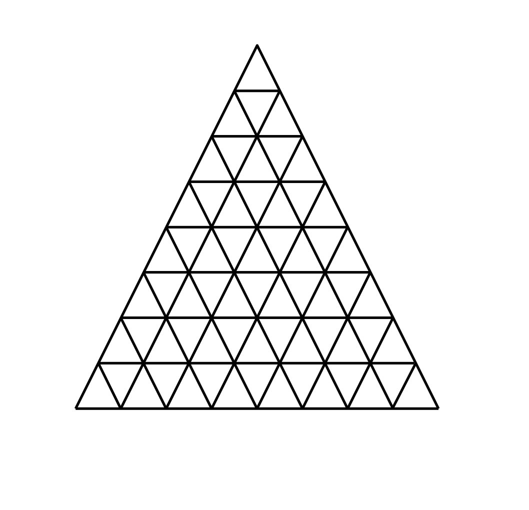


Megoldás

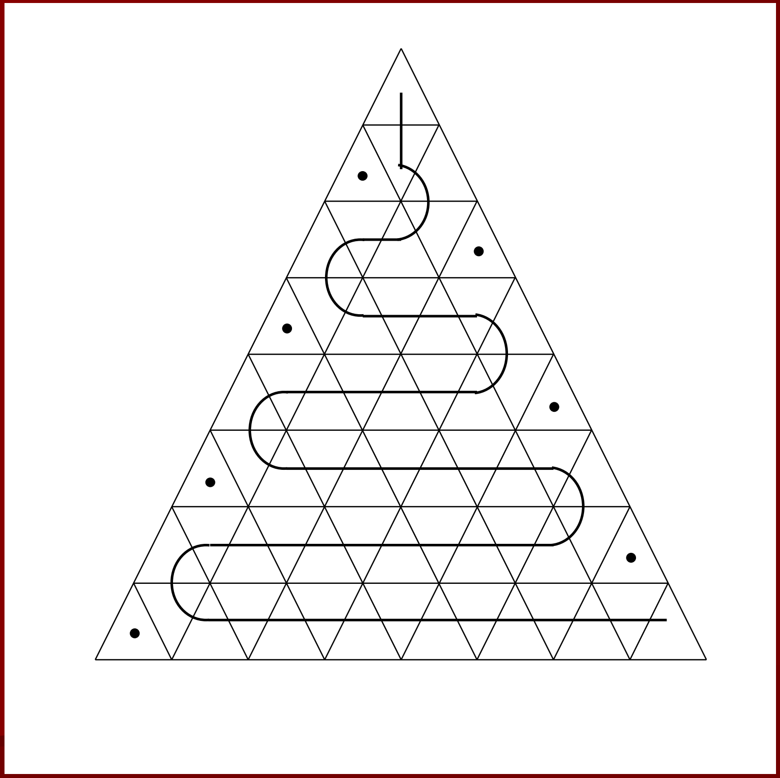


Javasolt feladatok

<u>18. feladat</u>: A mellékelt ábrán 64 db egyforma, háromszög alakú csempével kirakott fal látható. Egyszer egy szeszélyes takarítónő a fal csempéinek a tisztítását a legfelső csempével kezdte, és mindig az előzőleg tisztított csempe egyik szomszédjával folytatta. (Két csempe szomszédos, ha van közös oldaluk.) Mennyi a legtöbb csempe, amelyet a takarítónő megtisztított, ha egy csempét sem tisztított kétszer?

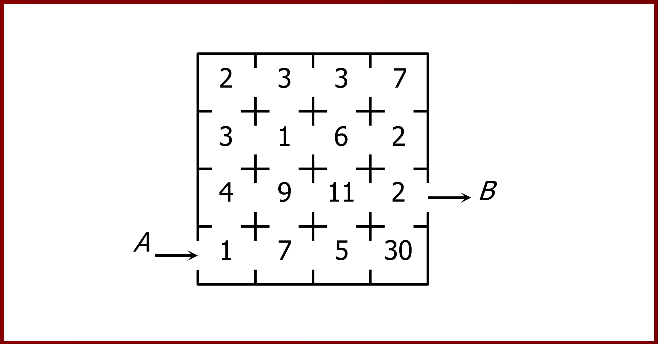


Megoldás

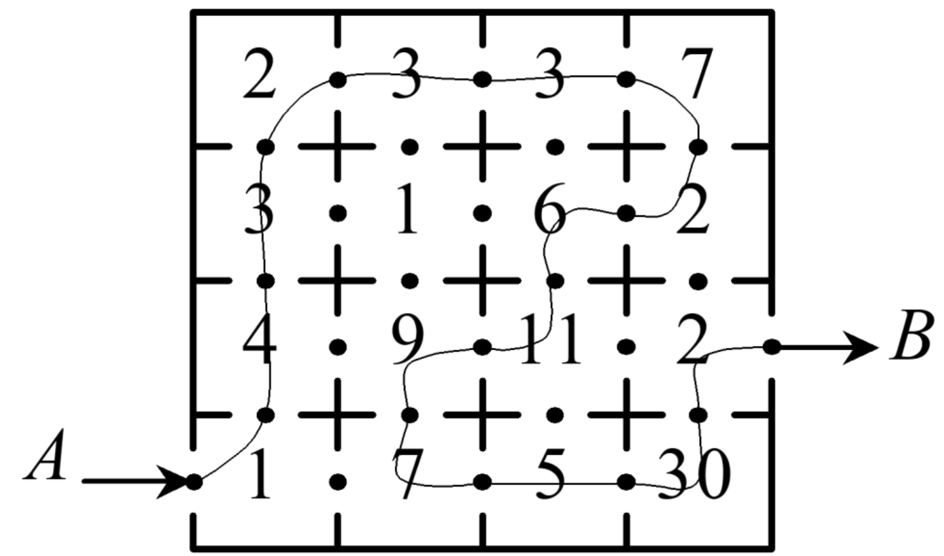


Javasolt feladatok

<u>19. feladat</u>: Az *A*-val jelölt ajtóból indulunk és a *B*-vel jelöltbe érkezünk, minden szobán csak egyszer haladunk át. Mennyi a legtöbb összegyűjthető pont?



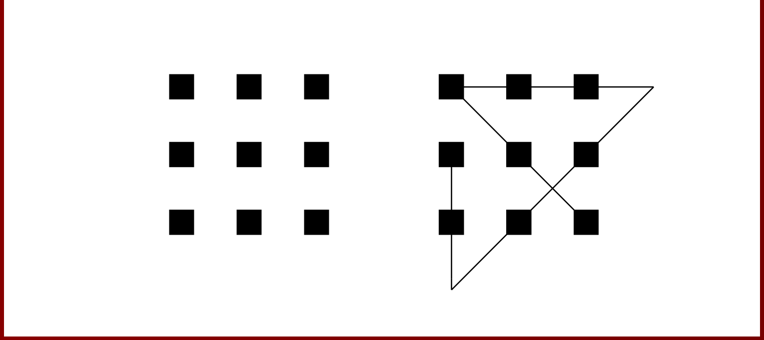
Megoldás



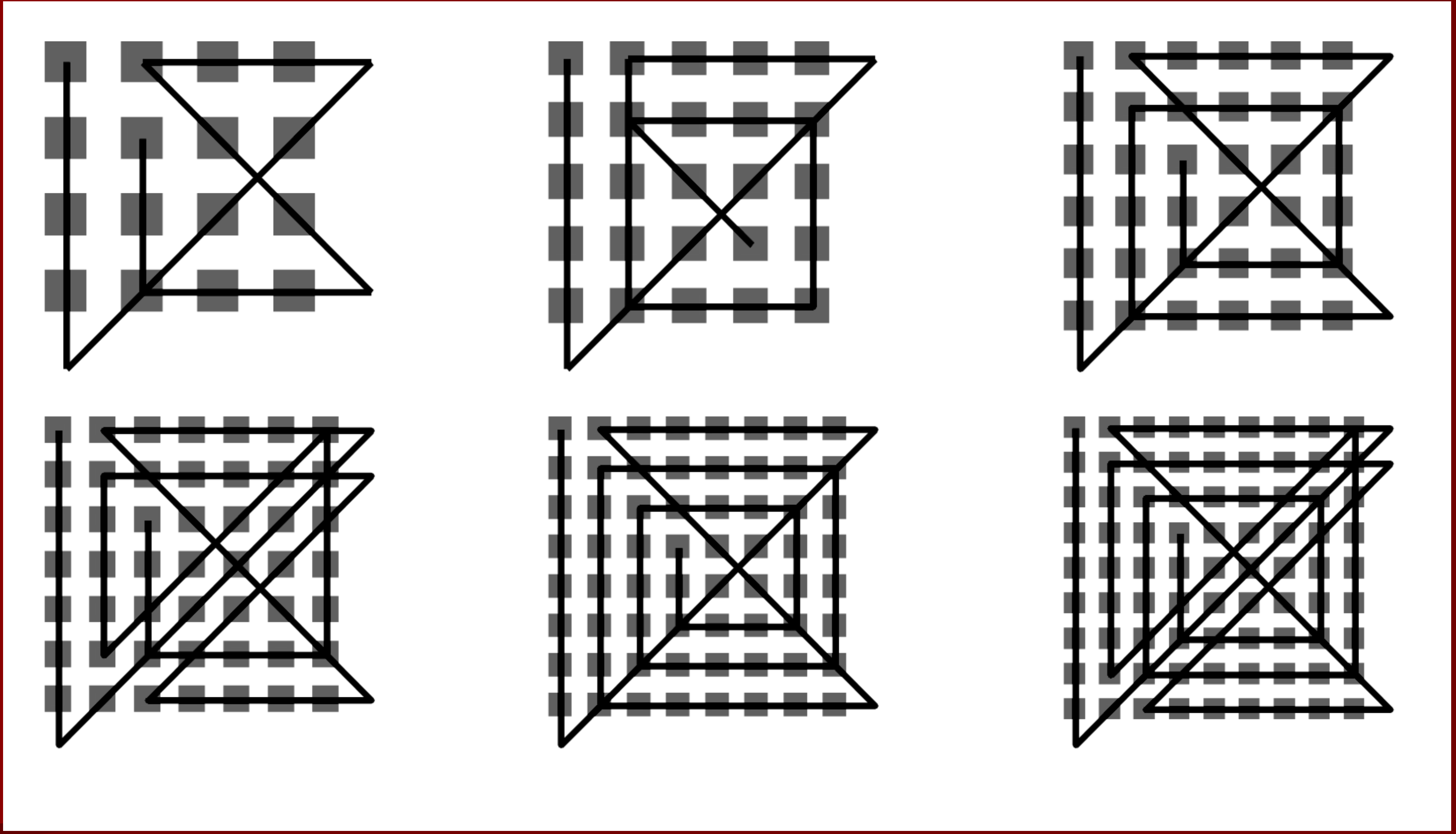
A mellékelt ábrán a jelzett úton végighaladva a maximális 96 pontszámból 95 gyűjthető össze.

Javasolt feladatok

20. feladat: Közismert a kreativitás jellegzetes feladattípusa: kössük össze négy egyenes vonallal a 9 pontot úgy, hogy a ceruzát nem emeljük fel a papírról. Oldjuk meg az analóg feladatot 4×4, 5×5, 6×6, 7×7, 8×8, 9×9 pontrács esetén is!



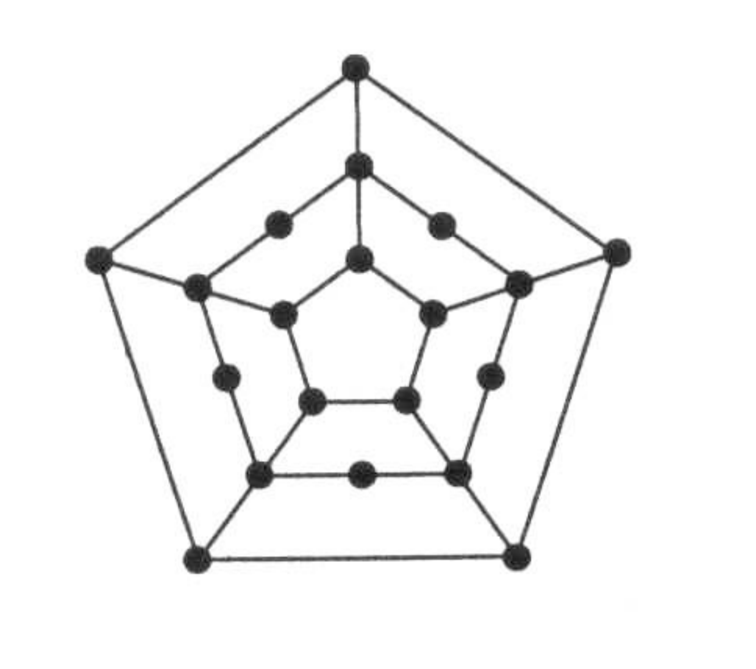
Megoldás



Figyelemmel kísérve az összekötések algoritmikus jellegét, az $n \times n$ pont $2n - 2$ szakaszból álló törött vonallal köthető össze.

Javasolt feladatok

21. feladat: Igazoljuk, hogy a következő gráfban nincs Hamilton-kör!



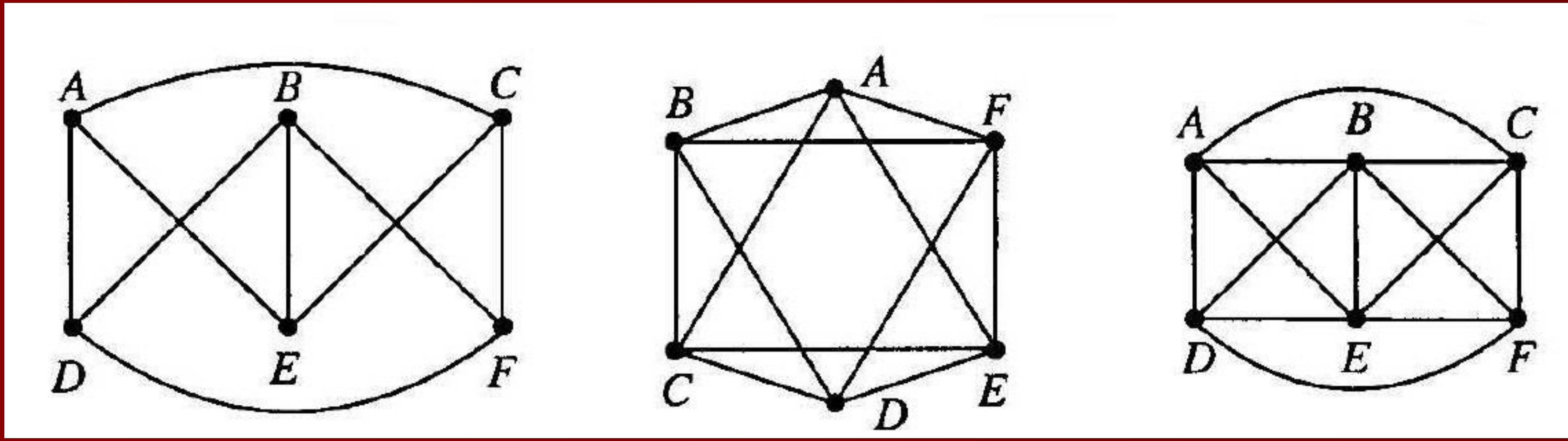
Megoldás

Nem létezik Hamilton-kör és így Hamilton-út sem, mert ha elvesszük a gráf 5 negyedfokú pontját, akkor 7 >5 komponensre esik szét.

(a szükséges feltétel nincs kielégítve)

Javasolt feladatok

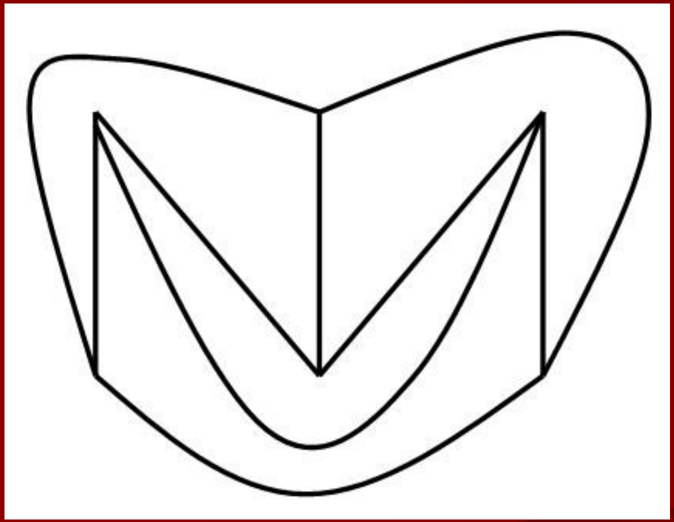
22. feladat: Döntsük el, hogy a következő gráfok közül melyek síkgráfok, és melyek nem!

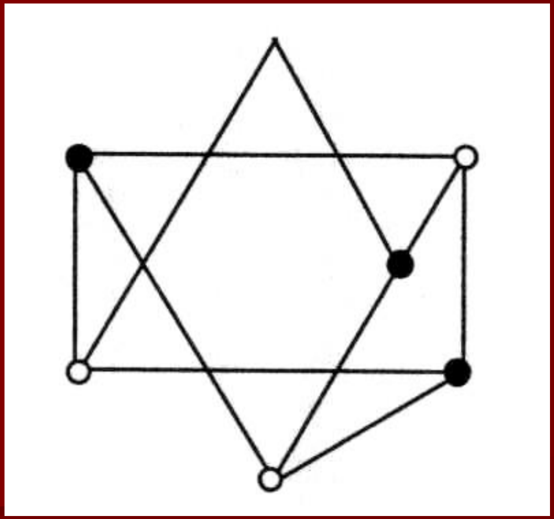


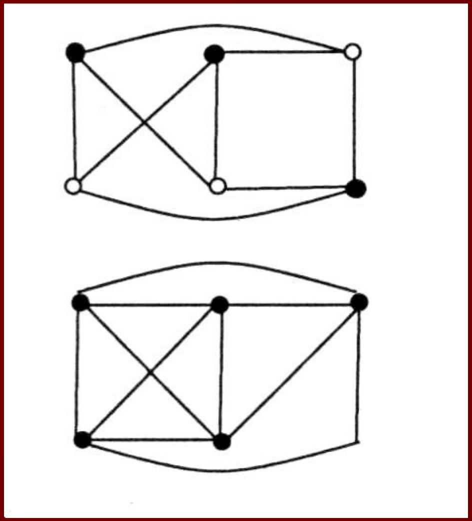
Megoldás

Az első síkgráf!

A 2. és a 3. tartalmazzák a K3,3 és/vagy K5 gráfok soros bővítését:

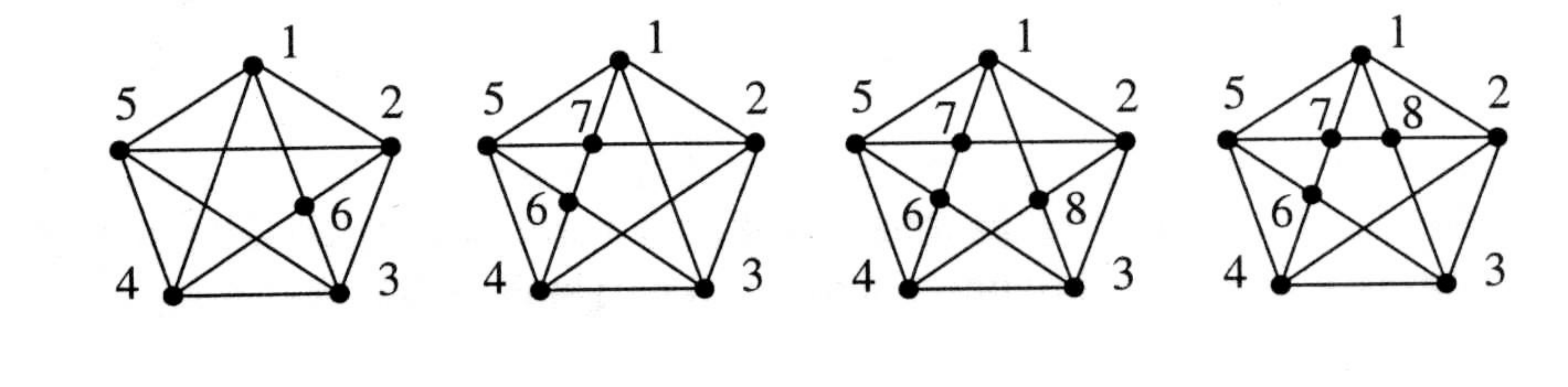






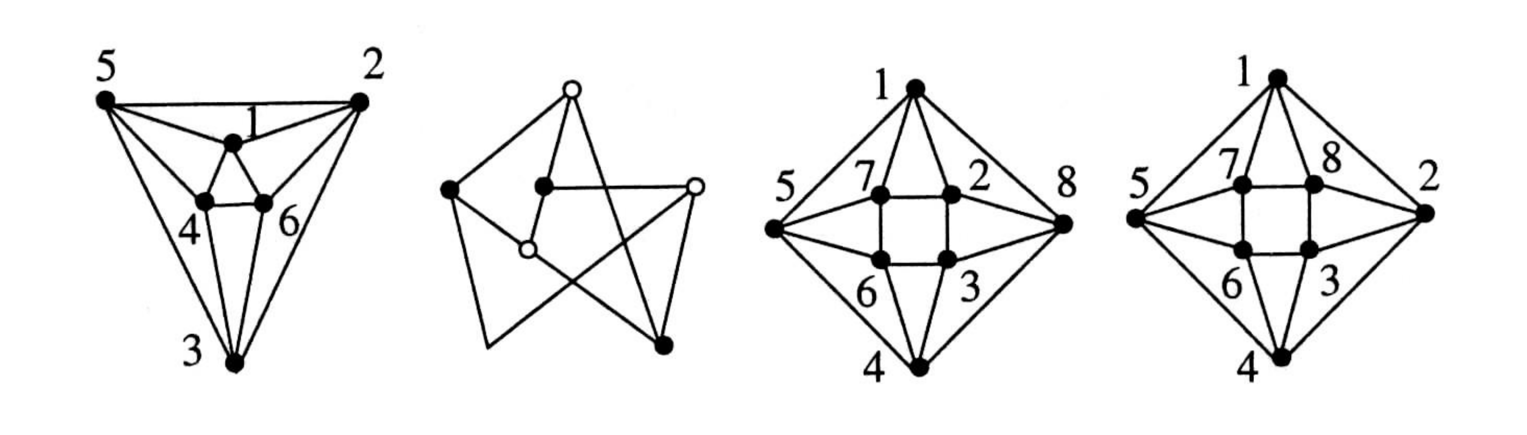
Javasolt feladatok

23. feladat: Döntsük el, hogy a következő gráfok közül melyek síkgráfok, és melyek nem! Amelyik az, rajzoljuk meg a síkban, egyenes szakaszokkal!



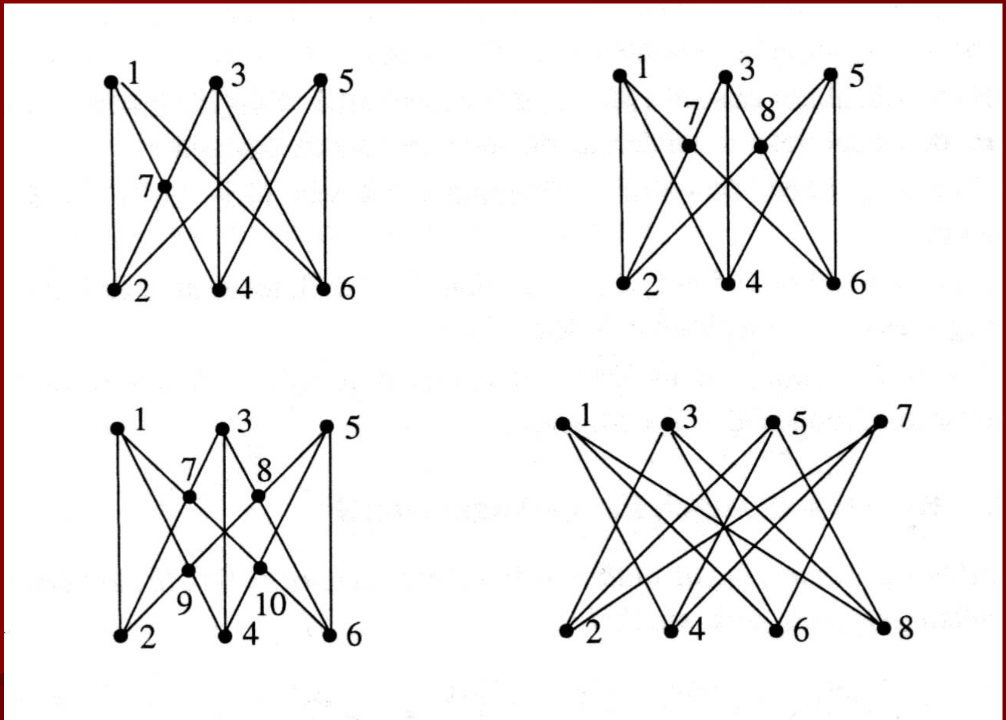
Megoldás

A másodikban van K3,3, a többi megrajzolható



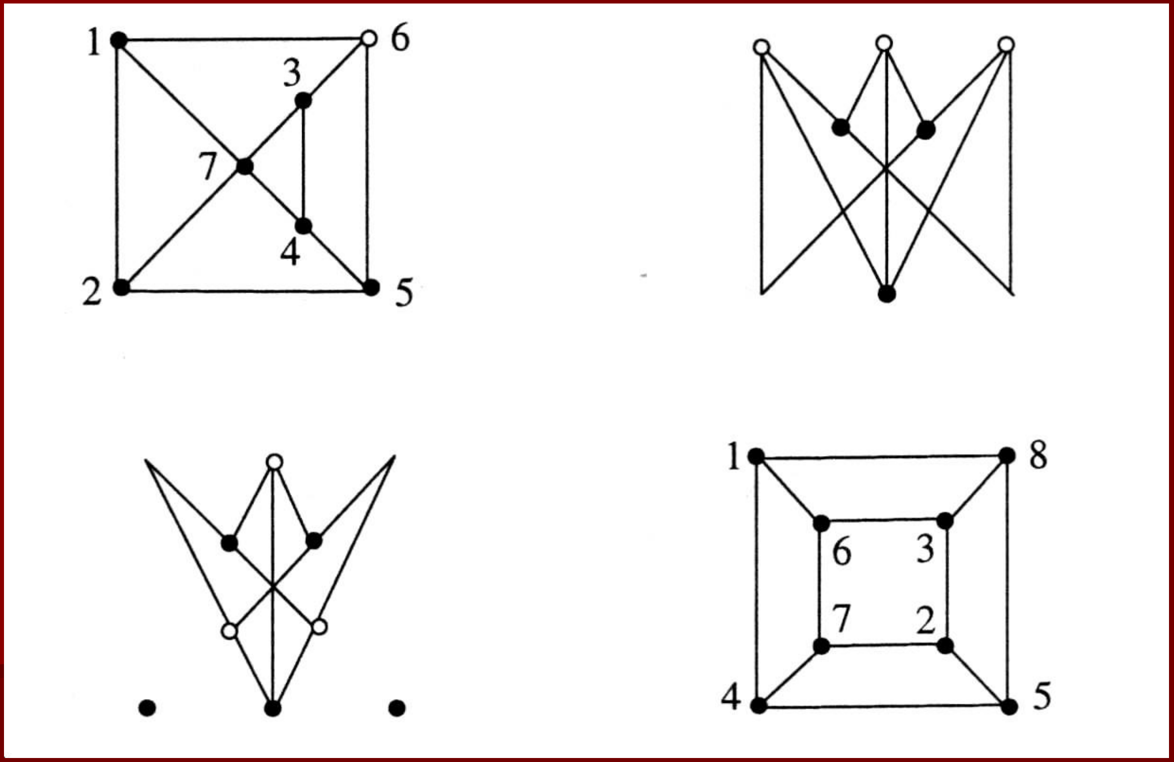
Javasolt feladatok

24. feladat: Döntsük el, hogy a következő gráfok közül melyek síkgráfok, és melyek nem! Amelyik az, rajzoljuk meg a síkban, egyenes szakaszokkal!



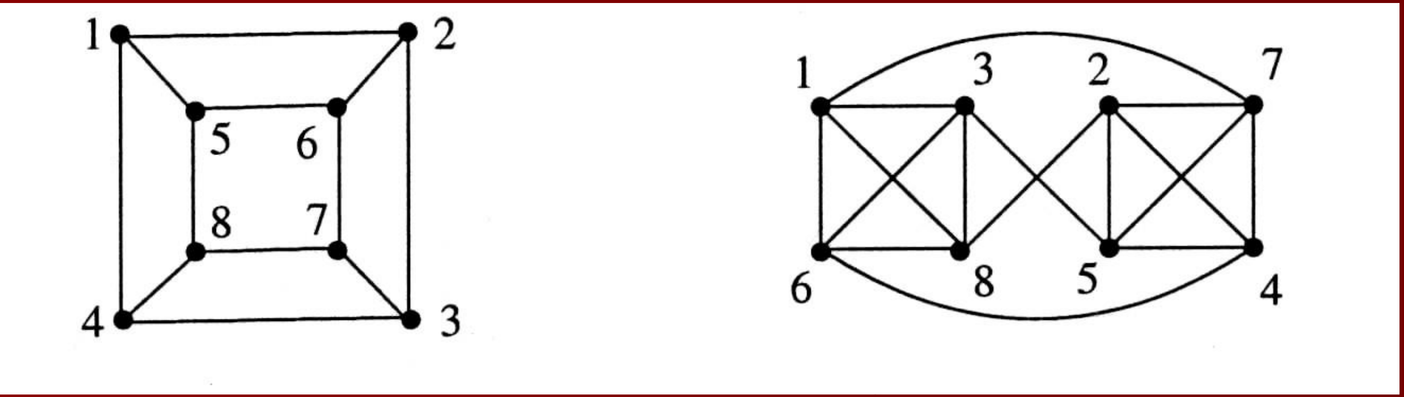
Megoldás

A 2. és a 3. nem rajzolható meg, van benne K3,3



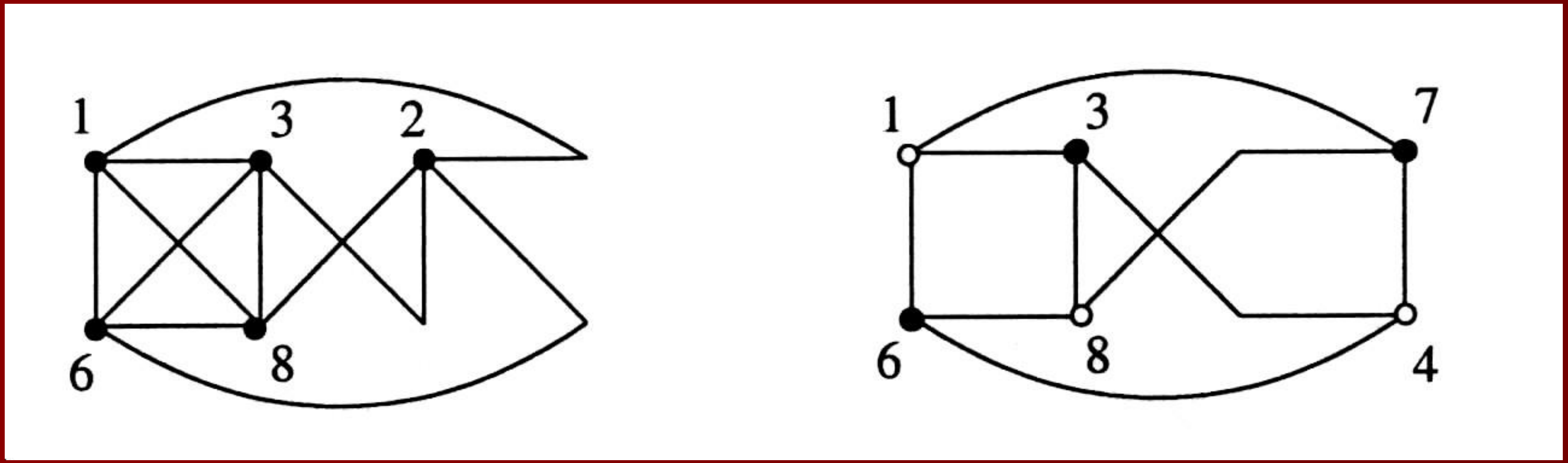
Javasolt feladatok

25. feladat: Síkbarajzolható-e a kocka élgráfjának a komplementere (a teljes gráfra való kiegészítése) ? Ha igen, rajzoljuk meg egyenes szakaszokkal!



Megoldás

Nem, mert van benne K5 és K3,3 is



Forrásanyag:

[1] Friedl Katalin, Recski András, Simonyi Gábor: Gráfelméleti feladatok, Typotex, Budapest, 2006

[2] Tuzson Zoltán: Hogyan oldjunk meg aritmetikai feladatokat, Ábel Kiadó, 2011

Vége