Micimackó meséje XI-XII. osztályosoknak!

# Elsőfokú lineáris egyenletrendszerek megoldása determinánsokkal

- Készítette: Tuzson Zoltán, tanár

# Az egyenletrendszerek megoldása során 3 különböző esetet különböztetünk meg:

1) <u>Az egyenletek száma = az ismeretlenek száma:</u>

2) <u>Az egyenletek száma < ismeretlenek száma:</u>

3) <u>Az egyenletek száma > ismeretlenek száma:</u>

# Szakkifejezések:

- Egy egyenletrendszer kompatibilis vagy összeférhető, ha megoldható, tehát van megoldása.
- Egy egyenletrendszer inkompatibilis, vagy összeférhetetlen, ha nincs megoldása
- Egy egyenletrendszer határozott, ha pontosan egy x, y, z megoldása van.
- Egy egyenletrendszer határozatlan, ha végtelen sok megoldása van (a megoldások függenek egy vagy több paramétertől)

## 1) Az egyenletek száma = az ismeretlenek száma

- Kiszámoljuk az egyenletrendszer D diszkriminánsát

- Amennyiben a rendszer D diszkriminánsa nem nulla, úgy az egyenlet rendszert Cramer egyenlet rendszernek hívjuk, és ennek a megoldása (három ismeretlen esetén):

$$x = \frac{D_x}{D},\ y = \frac{D_y}{D},\ z = \frac{D_z}{D}$$

- A $D_x, D_y, D_z$ determinánsokat a D determinánsból kapunk úgy, hogy az illető ismeretlen együtthatóinak az oszlopát a szabad tagok oszlopával helyettesítjük.

(lásd a feladatoknál!)

# 1. feladat:

- Oldjuk meg Cramer szabállyal a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} x + y + 2z = \mathbf{-1} \\ 2x - y + 2z = \mathbf{-4} \\ 4x + y + 4z = \mathbf{-2} \end{cases}$$

- A rendszer diszkriminánsa:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

- Az ismeretlenekhez tartozó determinánsok:

$$D_x = \begin{vmatrix} \mathbf{-1} & 1 & 2 \\ \mathbf{-4} & -1 & 2 \\ \mathbf{-2} & 1 & 4 \end{vmatrix} = 6 \qquad D_y = \begin{vmatrix} 1 & \mathbf{-1} & 2 \\ 2 & \mathbf{-4} & 2 \\ 4 & \mathbf{-2} & 4 \end{vmatrix} = 12 \qquad D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \mathbf{-1} \\ 2 & -1 & \mathbf{-4} \\ 4 & 1 & \mathbf{-2} \end{vmatrix} = \text{-}12$$

- Tehát

$$x = \frac{D_x}{D} = 1,\ y = \frac{D_y}{D} = 2,\ z = \frac{D_z}{D} = \text{-}2$$

- A Cramer egyenletrendszer MINDIG <u>kompatibilis</u> és <u>határozott</u>!
- De csak akkor Cramer rendszer, ha $D \neq 0$

# 2. feladat:

- Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} x+y+2z=\mathbf{-1} \\ 2x-y+2z=\mathbf{-4} \\ -2x-2y-4z=\mathbf{4} \end{cases}$$

- A rendszer diszkriminánsa:

$$D=\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & 2 \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & 2 \\ -2 & -2 & -4 \end{vmatrix}=0!$$

- Mivel a determináns 0, ezért szükséges EBBŐL egy 2×2-es ú.n. <u>FŐDETERMINÁNST</u> választani, ami NEM NULLA!

$$D_{fő}=\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} \end{vmatrix}=-3\neq 0$$

- Lett egy MELLÉKEGYENLET (a harmadik) így lesz egy ú.n. <u>KARAKTERISZTIKUS</u> determináns, amit a fődeterminánsból kapunk, <u>szegélyezéssel</u>:

$$D_{kar}=\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & -1 \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & -4 \\ -2 & -2 & 4 \end{vmatrix}=-18\neq 0$$

- Ha a karakterisztikus determináns NEM NULLA, akkor Rouché tétele értelmében, az egyenlet rendszer <u>inkompatibilis</u>, vagyis nincs megoldása.

# 3. feladat:

- Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} x+y+2z=-1 \\ 2x-y+2z=-4 \\ -2x-2y-4z=2 \end{cases}$$

- A rendszer diszkriminánsa:

$$D=\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & 2 \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & 2 \\ -2 & -2 & -4 \end{vmatrix}=0!$$

- Mivel a determináns 0, ezért szükséges EBBŐL egy 2×2-es ú.n. <u>FŐDETERMINÁNST</u> választani, ami NEM NULLA!

$$D_{fő}=\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} \end{vmatrix}=-3\neq 0$$

- Lett egy MELLÉKEGYENLET (a harmadik) így lesz egy ú.n. <u>KARAKTERISZTIKUS</u> determináns, amit a ődeterminánsból kapunk, <u>szegélyezéssel</u>:

$$D_{kar}=\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & -1 \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & -4 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix}=0$$

- Ha a karakterisztikus determináns NULLA, akkor Rouché tétele értelmében, az egyenlet rendszer <u>kompatibilis</u>, és így folytatjuk: z=m, ekkor

# folytatás:

- Beírjuk a z=m értéket az egyenletekbe, és átvisszük a tulsó oldalra:

$$\begin{cases} x+y=-2m-1 \\ 2x-y=-2m-4 \\ 4x+y=-4m-2 \end{cases}$$

- Ebből csak az első 2 egyenletből álló rendszert oldjuk meg, Cramer szabállyal:

$$\begin{cases} \mathbf{1}x+\mathbf{1}y=-2m-1 \\ \mathbf{2}x\,\mathbf{-1}y=-4m-4 \end{cases} \qquad D=D_{fő}=\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} \end{vmatrix}=-3\neq 0$$

- A D éppen a D fő, és kiszámoljuk: $D_x=\begin{vmatrix} -2m-1 & 1 \\ -4m-2 & -1 \end{vmatrix}=6m-1 \qquad D_y=\begin{vmatrix} 1 & -2m-1 \\ 2 & -4m-2 \end{vmatrix}=2$
- Ezért, a Cramer szabály szerint:

$$x=\frac{D_x}{D}=-\frac{6m+5}{3},\; y=\frac{D_y}{D}=0,\; z=m,\; m\in\mathbb{R}$$

- Mivel az m paraméter bármilyen értéket felvehet, ezért az egyenletrendszer kompatibilis és határozatlan (meg lehet oldani, de végtelen sok megoldása van).

## 2) <u>Az egyenletek száma < ismeretlenek száma:</u>

- Baloldalon csak annyi ismeretlent tartunk meg, hogy UGYANANNYI legyen az ismeretlenek száma, mint az egyenletek száma.
- A többi ismeretlent rendre ÁTNEVEZZÜK m, n, p… értékekre, és ÁTVISSZÜK a tulsó oldalra.
- Megoldjuk az így kapott egyenletrendszert, az m, n, p… függvényében. Tehát a rendszerünk határozatlan lesz!

# 4. feladat:

- Oldjuk meg, a következő egyenletrendszert: $\begin{cases} -x+y+2z=-1 \\ 2x-3y+z=3 \end{cases}$
- Muszáj egy ismeretlent a jobboldalra vinni, legyen tehát z=m, és így az egyenlet rendszer: $\begin{cases} -x+y=-2m-1 \\ 2x-3y=-m+3 \end{cases}$
- Az új egyenletrendszer determinánsa $D=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=1\neq 0$ és mivel nem nulla, ezért Cramer egyenletrendszer.
- Kiszámoljuk: $D_x=\begin{vmatrix} -2m-1 & 1 \\ -m+3 & -3 \end{vmatrix}=7m$ és $D=\begin{vmatrix} -1 & -2m-1 \\ 2 & -m+3 \end{vmatrix}=5m-1$
- A Cramer szabály szerint: $x=\frac{D_x}{D}=7m,\ y=\frac{D_y}{D}=5m-1,\ z=m,\ m\in\mathbb{R}$
- Tehát az egyenletrendszer kompatibilis és határozatlan!

# 3) Az egyenletek száma > ismeretlenek száma:

- Ebben az esetben kiválasztunk csak annyi egyenletet, amennyi ismeretlenünk van (ennek a determinánsa ne legyen nulla). Ezek a főegyenletek.
- A többi egyenletet ú.n. mellékegyenletnek nevezzük.
- Megoldjuk a főegyenletekből álló rendszert.
- Ezután annyi karakterisztikus determinánst képezünk szegélyezéssel, amennyi mellékegyenletünk van.
- Rouché tétele: Az egyenletrendszer csak akkor kompatibilis, ha az összes karakterisztikus determináns nulla. Ellenkező esetben inkompatibilis, tehát nem kell megoldani.
- Ha kompatiblis, akkor Cramer szabállyal megoldjuk a főegyenletekből álló rendszert!

# 5. feladat:

- Oldjuk meg a következő egyenletrendszert: $\begin{cases} 3x+y=-1 \\ -x+y=2 \\ x-2y=-1 \\ 2x-2y=-4 \end{cases}$
- Tartsuk meg az első két egyenletet: $\begin{cases} 3x+y=-1 \\ -x+y=2 \end{cases}$ (*), $D=\begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{vmatrix}=4\neq 0$
- Továbbá 2 mellékegyenletünk van, ezért 2 karakterisztikus determináns lesz:

$$D_{kar1}=\begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & -1 \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}=9 \quad D_{kar2}=\begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & -1 \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & 2 \\ 2 & -2 & -4 \end{vmatrix}=0$$

- De mivel az egyik karakterisztikus determináns nem nulla, ezért Rouché tétele értelmében, az egyenlet rendszer <u>inkompatibilis</u> (nincs megoldása= nem oldható meg)

# 6. feladat:

- Oldjuk meg a következő egyenletrendszert: $\begin{cases} 3x + y = -1 \\ -x + y = 2 \\ -6x - 2y = 2 \\ 2x - 2y = -4 \end{cases}$
- Tartsuk meg az első két egyenletet: $\begin{cases} 3x + y = -1 \\ -x + y = 2 \end{cases}$ (*), $D = \begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = 4 \neq 0$
- Továbbá 2 mellékegyenletünk van, ezért 2 karakterisztikus determináns lesz: $D_{kar1} = \begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & -1 \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & 2 \\ -6 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$ $D_{kar2} = \begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & -1 \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & 2 \\ 2 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 0$
- Mivel mind a két karakterisztikus determináns 0, ezért a rendszer komapatibilis, így Cramer szabállyal megoldjuk a (*) egyenlet rendszert:

$$D_x = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3,\ D_y = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \Rightarrow x = \frac{D_x}{D} = -\frac{3}{4},\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{5}{4}$$

# Paraméteres egyenletrendszerek tárgyalása

- Leghamarabb az egyenletrendszernek egy determinánst írunk fel.
- Kiszámítjuk, majd megkeressük, hogy milyen paraméter értékre nem nulla.
- Amikor $D \neq 0$, akkor Cramer szabállyal megoldjuk az egyenletrendszert, mint előbbiekben.
- Megkeressük azon paraméter értékeket, amelyekre $D = 0$
- Ezeket a paraméter értékeket rendre visszahelyettesítjük az egyenletekbe.
- Az újonnan kapott egyenletek esetén nyilván $D = 0$
- Tehát fődeterminánst kell választanunk, és úgy járunk el, mint az előbbiekben

# 7. feladat:

- Az m paraméter függvényében tárgyaljuk, és oldjuk meg, a következő egyenletrendszert: $\begin{cases} mx + y - z = 1 \\ x + my - z = 1 \\ -x + y + mz = 1 \end{cases}$
- A rendszer determinánsa: $D = \begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & m & -1 \\ -1 & 1 & m \end{vmatrix} = m(m-1)(1+m)$
- Mivel $D = 0 \Leftrightarrow m(1-m)(1+m) = 0$ ezért azt kapjuk, hogy $m \in \{-1, 0, 1\}$
- I.) Ha $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ akkor $D \neq 0$ tehát Cramer egyenletrendszer, így

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & m & -1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = (m+1)(m-1) \quad D_y = \begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & m \end{vmatrix} = (m+1)(m-1) \quad D_z = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (m-1)(m+1)$$

# folytatás:

- Így hát Cramer szabály alapján: $x = \frac{D_x}{D} = \frac{1}{m},\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{1}{m},\ z = \frac{1}{m}$
- II.) Ha m=0, akkor az egyenlet rendszer így alakul:

$$\begin{cases} 0x + y - z = 1 \\ x + 0y - z = 1 \\ -x + y + 0z = 1 \end{cases}$$

- Meg kell válasszunk egy ődeterminánst: $D_{fő} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$
- A karakterisztikus determináns: $D_{kar} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ ezért a Rouché tétele
- szerint, az egyenlet rendszer inkompatibilis. (Ugyanerre a következtetésre jutunk akkor is, ha a 3 egyenletet összeadjuk, és 0=3 adódik).
- III.) Ha m=1, akkor az egyenlet rendszer így alakul:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + y - z = 1 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$$

- Észrevehető, hogy két egyenlet egyforma, ezért az egyiket elhagyjuk, így

# folytatás:

- Az egyenletrendszer a következő: $\begin{cases} x+y-z=1 \\ -x+y+z=1 \end{cases}$
- Most z=k, és átvisszük a másik oldalra, ekkor azt kapjuk, hogy $\begin{cases} x+y=k+1 \\ -x+y=-k+1 \end{cases}$
- A rendszer determinánsa $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=2\neq 0$
- Most megoldjuk a Cramer szabály szerint:

$$D_x=\begin{vmatrix} k+1 & 1 \\ -k+1 & 1 \end{vmatrix}=2k \qquad D_y=\begin{vmatrix} 1 & k+1 \\ -1 & -k+1 \end{vmatrix}=2 \qquad x=\frac{D_x}{D}=k,\ y=\frac{D_y}{D}=1,\ z=k,\ k\in\mathbb{R}$$

- IV.) Ha m=-1, akkor az egyenlet rendszer így alakul: $\begin{cases} -x+y-z=1 \\ x-y-z=1 \\ -x+y-z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y-z=1 \\ x-y-z=1 \end{cases}$
- Meg kell válasszunk egy fődeterminánst:

$$D_{fő}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=-2\neq 0$$

- Most x=k, és átvisszük a másik oldalra, ekkor azt kapjuk, hogy $\begin{cases} y-z=k+1 \\ -y-z=-k+1 \end{cases}$
- Kiszámoljuk $D_y=\begin{vmatrix} k+1 & -1 \\ -k+1 & -1 \end{vmatrix}=-2k \qquad D_z=\begin{vmatrix} 1 & k+1 \\ -1 & -k+1 \end{vmatrix}=2$
- Tehát a Cramer szabály szerint $y=\frac{D_y}{D}=k,\ z=\frac{D_z}{D}=-1,\ x=k,\ k\in\mathbb{R}$

# Összefoglalás:

- I) Ha $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1,0,1\}$ akkor az egyenletrendszer kompatibilis, határozott és

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{1}{m},\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{1}{m},\ z = \frac{1}{m}$$

- II) Ha $m = 0$ akkor az egyenletrendszer inkompatibilis.

- III) Ha $m = 1$ akkor az egyenletrendszer kompatibilis és határozatlan, és

$$x = \frac{D_x}{D} = k,\ y = \frac{D_y}{D} = 1,\ z = k,\ k \in \mathbb{R}$$

- IV) Ha $m = -1$ akkor az egyenletrendszer kompatibilis és határozatlan, és

$$y = \frac{D_y}{D} = k,\ z = \frac{D_z}{D} = -1,\ x = k,\ k \in \mathbb{R}$$

# A homogén egyenlet rendszerek

- Három ismeretlen esetén, az alakjuk a következő:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases}$$

- Könnyen látható, hogy $x = y = z = 0$ <u>mindig megoldása</u> az egyenletnek. Ezt a megoldást <u>banális</u>, vagy <u>triviális</u> megoldásnak hívják.
- Az egyenlet rendszer diszkriminánsa:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

- Könnyen látható, hogy $D_x = D_y = D_z = 0$ mivel 1-1 oszlop csupa 0.
- Tehát a homogén egyenletrendszernek csak akkor van a banálistól különböző megoldása, ha $D = 0$ és ekkor egy ződeterminánst kell választanunk, és ugyanúgy járunk el, mint az előbbiekben.

# 8. feladat:

- Oldjuk meg, a következő egyenletrendszert: $\begin{cases} -x-y+2z=0 \\ -x+2y-z=0 \\ 2x-y-z=0 \end{cases}$
- Az egyenletrendszer determinánsa $D=\begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}=0$
- Választunk egy fődeterminánst: $D_{fő}=\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=-3\neq 0$
- Legyen z=m, ekkor az egyenlet rendszer így alakul: $\begin{cases} -x-y=-2m \\ -x+2y=m \end{cases}$ (*)
- Ekkor A karakterisztikus determináns: $D_{kar}=\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0$
- Jegyezd meg: A homogén egyenletrendszer karakterisztikus determinánsa mindig 0.
- Tehát a Rouché tétel szerint, az egyenletrendszer kompatibilis, így a Cramer szabállyal megoldjuk a (*) egyenletrendszert:

$$D_x=\begin{vmatrix} -2m & -1 \\ m & 2 \end{vmatrix}=-3m,\ D_y=\begin{vmatrix} -1 & -2m \\ -1 & m \end{vmatrix}=-3m \Rightarrow x=\frac{D_x}{D}=m,\ y=m,\ z=m,\ m\in\mathbb{R}$$

# Gyakorló feladatok I.

Oldjuk meg a következő Cramer egyenletrendszereket:

1)

$$a)\begin{cases}x+y+z=1\\2x+y-z=3\\4x+y+z=9\end{cases}\quad b)\begin{cases}x+y+z=6\\2x+3y+z=11\\3x+4y-z=8\end{cases}\quad c)\begin{cases}-2x+y+z=1\\x-2y+z=-2\\x+y-z=4\end{cases}\quad d)\begin{cases}3x-y+z=0\\-2x+y+3z=-7\\x+2y-2z=7\end{cases}$$

$$e)\begin{cases}x+2y+3z=14\\y+2z=8\\-x+2y+z=6\end{cases}\quad f)\begin{cases}x+4y+3z=1\\2x+5y+4z=4\\x-3y-2z=5\end{cases}\quad g)\begin{cases}2x-y+3z=3\\4x-y-2z=-2\\x+2y-2z=1\end{cases}\quad h)\begin{cases}2x+3y+z=4\\3x+y-2z=-1\\2x-3y+z=10\end{cases}$$

$$i)\begin{cases}x+y=2\\y+z=4\\x+z=-4\end{cases}\quad j)\begin{cases}2x-3y+z=1\\x+y-2z=0\\3x-2y-z=1\end{cases}\quad k)\begin{cases}x-y+z=3\\-x+y+z=-1\\x+y-z=-1\end{cases}\quad l)\begin{cases}2x+3y-z=-3\\-x-y+z=3\\x+z=0\end{cases}$$

# Gyakorló feladatok II.

Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket:

2)

$$a)\ \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y-z=3 \\ 4x+2y-2z=5 \end{cases} \quad b)\ \begin{cases} -6x-8y+2z=-16 \\ 2x+3y+z=11 \\ 3x+4y-z=8 \end{cases} \quad c)\ \begin{cases} -2x+y+z=1 \\ x-2y+z=-2 \\ 4x-2y-2z=3 \end{cases} \quad d)\ \begin{cases} 3x-y+z=0 \\ -2x+y+3z=-7 \\ 2x-y-3z=7 \end{cases}$$

$$e)\ \begin{cases} 2x-4y-2z=-12 \\ y+2z=8 \\ -x+2y+z=6 \end{cases} \quad f)\ \begin{cases} -3x+9y+6z=-15 \\ 2x+5y+4z=4 \\ x-3y-2z=5 \end{cases} \quad g)\ \begin{cases} 2x+4y-4z=3 \\ 4x-y-2z=-2 \\ x+2y-2z=1 \end{cases} \quad h)\ \begin{cases} 2x+3y+z=4 \\ -4x+6y-2z=-20 \\ 2x-3y+z=10 \end{cases}$$

$$i)\ \begin{cases} x+y=2 \\ y+z=4 \\ 2x+2y=-4 \end{cases} \quad j)\ \begin{cases} 6x-4y-2z=2 \\ x+y-2z=0 \\ 3x-2y-z=1 \end{cases} \quad k)\ \begin{cases} x-y+z=3 \\ -x+y+z=-1 \\ 2x-2y-2z=-3 \end{cases} \quad l)\ \begin{cases} 2x+2y-2z=-6 \\ -x-y+z=3 \\ x+z=0 \end{cases}$$

# Gyakorló feladatok III.

Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket:

3)

$$a)\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y-z=3 \end{cases} \quad b)\begin{cases} 2x+3y+z=11 \\ 3x+4y-z=8 \end{cases} \quad c)\begin{cases} -2x+y+z=1 \\ x-2y+z=-2 \end{cases} \quad d)\begin{cases} -2x+y+3z=-7 \\ x+2y-2z=7 \end{cases}$$

$$e)\begin{cases} y+2z=8 \\ -x+2y+z=6 \end{cases} \quad \mathrm{f})\begin{cases} x+4y+3z=1 \\ x-3y-2z=5 \end{cases} \quad \mathrm{g})\begin{cases} 2x-y+3z=3 \\ x+2y-2z=1 \end{cases} \quad \mathrm{h})\begin{cases} 2x+3y+z=4 \\ 2x-3y+z=10 \end{cases}$$

$$i)\begin{cases} y+z=4 \\ x+z=-4 \end{cases} \quad \mathrm{j})\begin{cases} x+y-2z=0 \\ 2x-3y+z=1 \end{cases} \quad \mathrm{k})\begin{cases} x-y+z=3 \\ x+y-z=-1 \end{cases} \quad \mathrm{l})\begin{cases} 2x+3y-z=-3 \\ -x-y+z=3 \end{cases}$$

# Gyakorló feladatok IV.

Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket:

4)

$$a)\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y-z=3 \\ 4x+y+z=9 \\ -4x-2y+2z=5 \end{cases} \quad b)\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x+3y+z=11 \\ 3x+4y-z=8 \\ -6x-8y-2z=-16 \end{cases} \quad c)\begin{cases} -2x+y+z=1 \\ x-2y+z=-2 \\ x+y-z=4 \\ 4x-2y-2z=2 \end{cases} \quad d)\begin{cases} 3x-y+z=0 \\ -2x+y+3z=-7 \\ x+2y-2z=7 \\ 4x-2y-6z=14 \end{cases}$$

$$e)\begin{cases} x+2y+3z=14 \\ y+2z=8 \\ -x+2y+z=6 \\ 2x-4y-2z=-12 \end{cases} \quad f)\begin{cases} x+4y+3z=1 \\ 2x+5y+4z=4 \\ x-3y-2z=5 \\ -2x-8y-6z=-3 \end{cases} \quad g)\begin{cases} 2x-y+3z=3 \\ 4x-y-2z=-2 \\ x+2y-2z=1 \\ -2x-4y+4z=-2 \end{cases} \quad h)\begin{cases} 2x+3y+z=4 \\ 3x+y-2z=-1 \\ 2x-3y+z=10 \\ -6x-2y+4z=3 \end{cases}$$

# Gyakorló feladatok V.

Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket:

5)

$$a)\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+y-z=0 \\ 4x+2y-2z=0 \end{cases} \quad b)\begin{cases} -6x-8y+2z=0 \\ 2x+3y+z=0 \\ 3x+4y-z=0 \end{cases} \quad c)\begin{cases} -2x+y+z=0 \\ x-2y+z=0 \\ 4x-2y-2z=0 \end{cases} \quad d)\begin{cases} 3x-y+z=0 \\ -2x+y+3z=0 \\ 2x-y-3z=0 \end{cases}$$

$$e)\begin{cases} 2x-4y-2z=-12 \\ y+2z=8 \\ -x+2y+z=6 \end{cases} \quad \mathrm{f})\begin{cases} -3x+9y+6z=0 \\ 2x+5y+4z=0 \\ x-3y-2z=0 \end{cases} \quad \mathrm{g})\begin{cases} 2x+4y-4z=0 \\ 4x-y-2z=0 \\ x+2y-2z=0 \end{cases} \quad \mathrm{h})\begin{cases} 2x+3y+z=0 \\ -4x+6y-2z=0 \\ 2x-3y+z=0 \end{cases}$$

$$i)\begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \\ 2x+2y=0 \end{cases} \quad \mathrm{j})\begin{cases} 6x-4y-2z=0 \\ x+y-2z=0 \\ 3x-2y-z=0 \end{cases} \quad \mathrm{k})\begin{cases} x-y+z=0 \\ -x+y+z=0 \\ 2x-2y-2z=0 \end{cases} \quad \mathrm{l})\begin{cases} 2x+2y-2z=0 \\ -x-y+z=0 \\ x+z=0 \end{cases}$$

# Gyakorló feladatok VI.

Tárgyaljuk, és oldjuk meg a következő paraméteres egyenletrendszereket:

6)

$$a)\ \begin{cases} mx+y+z=1 \\ 2x+y-z=3 \\ 4x+my+z=9 \end{cases} \quad b)\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x+my+z=11 \\ mx+4y-z=8 \end{cases} \quad c)\begin{cases} -2x+my+z=m \\ x-2y+z=-2 \\ x+my-z=4 \end{cases} \quad d)\begin{cases} mx-y+z=0 \\ -2x+y+mz=0 \\ x+2y-2z=0 \end{cases}$$

$$e)\ \begin{cases} x+my+3z=14 \\ y+mz=8 \\ -x+2y+z=6 \end{cases} \quad f)\begin{cases} x+4y+mz=1 \\ 2x+5y+4z=4 \\ x-my-2z=5 \end{cases} \quad g)\begin{cases} 2x-y+3z=0 \\ 4x-y-2z=0 \\ x+2y-2z=0 \end{cases} \quad h)\begin{cases} 2x+3y+z=4 \\ 3x+y-mz=-1 \\ mx-3y+z=10 \end{cases}$$

$$i)\ \begin{cases} mx+y=2 \\ y+mz=4 \\ x+z=-4 \end{cases} \quad j)\begin{cases} 2x-my+z=0 \\ x+y-2z=0 \\ mx-2y-z=0 \end{cases} \quad k)\begin{cases} mx-y+z=3 \\ -x+y+z=-1 \\ x+my-z=-m \end{cases} \quad l)\begin{cases} 2x+3y-z=-3 \\ -x-y+mz=3 \\ x+mz=0 \end{cases}$$

Megoldottam!

# Köszönöm a figyelmet!