Másodrendű mátrixok hatványozásáról

II.

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

Ebben a részben a mátrixok hatványozásának egy újabb módszerével ismerkedünk meg. Noha az indukció itt is jelen lehet, a megoldás lényegét jól megválasztott változócserék képezik.

II. A trigonometriai módszer

Indulásként nézzük a következő feladatot:

1. feladat: Ha $A=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, akkor számítsuk ki az A^n hatványt $\forall n\in\mathbb{N}^*$ esetén!

Megoldás: a mátrixban levő értékek láttán könnyen eszünkbe juthatnak a 30°-os és a 60°-os szögek sinusa és cosinusa, pontosabban $\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\frac{\pi}{3}$. Ezért a mátrixunk így írható át: $A=\begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{bmatrix}$. Most, a trigonometriai alapképletek segítségével azonnal megkapjuk, hogy

$A^2=\begin{bmatrix} \cos\frac{2\pi}{3} & -\sin\frac{2\pi}{3} \\ \sin\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3} \end{bmatrix}$, $A^3=\begin{bmatrix} \cos\frac{3\pi}{3} & -\sin\frac{3\pi}{3} \\ \sin\frac{3\pi}{3} & \cos\frac{3\pi}{3} \end{bmatrix}$, $A^4=\begin{bmatrix} \cos\frac{4\pi}{3} & -\sin\frac{4\pi}{3} \\ \sin\frac{4\pi}{3} & \cos\frac{4\pi}{3} \end{bmatrix}$. Ezért most megfogalmazhatjuk a sejtéseinket, hogy $A^k=\begin{bmatrix} \cos\frac{k\pi}{3} & -\sin\frac{k\pi}{3} \\ \sin\frac{k\pi}{3} & \cos\frac{k\pi}{3} \end{bmatrix}$. Így indukcióval bizonyítani fogjuk, hogy $A^{k+1}=\begin{bmatrix} \cos\frac{(k+1)\pi}{3} & -\sin\frac{(k+1)\pi}{3} \\ \sin\frac{(k+1)\pi}{3} & \cos\frac{(k+1)\pi}{3} \end{bmatrix}$ is igaz. Valóban, a trigonometriai alapképletek alapján

$$A^{k+1}=A\cdot A^k=\begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \cos\frac{k\pi}{3} & -\sin\frac{k\pi}{3} \\ \sin\frac{k\pi}{3} & \cos\frac{k\pi}{3} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\frac{(k+1)\pi}{3} & -\sin\frac{(k+1)\pi}{3} \\ \sin\frac{(k+1)\pi}{3} & \cos\frac{(k+1)\pi}{3} \end{bmatrix}.$$

2. feladat: Ha $A=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, akkor számítsuk ki az A^n hatványt $\forall n\in\mathbb{N}^*$ esetén!

Megoldás: ezúttal vezessük be a következő jelöléseket: $0=\cos\frac{\pi}{2}, 1=\sin\frac{\pi}{2}$. Ezért a mátrixunk így írható át: $A=\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2}\\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2}\end{bmatrix}$. Most, a trigonometriai alapképletek segítségével azonnal megkapjuk, hogy

$A^2=\begin{bmatrix}\cos\frac{2\pi}{2} & -\sin\frac{2\pi}{2}\\ \sin\frac{2\pi}{2} & \cos\frac{2\pi}{2}\end{bmatrix}$, $A^3=\begin{bmatrix}\cos\frac{3\pi}{2} & -\sin\frac{3\pi}{2}\\ \sin\frac{3\pi}{2} & \cos\frac{3\pi}{2}\end{bmatrix}$, $A^4=\begin{bmatrix}\cos\frac{4\pi}{2} & -\sin\frac{4\pi}{2}\\ \sin\frac{4\pi}{2} & \cos\frac{4\pi}{2}\end{bmatrix}$. Ezért most megfogalmazhatjuk a sejtéseinket, hogy $A^k=\begin{bmatrix}\cos\frac{k\pi}{2} & -\sin\frac{k\pi}{2}\\ \sin\frac{k\pi}{2} & \cos\frac{k\pi}{2}\end{bmatrix}$. Így indukcióval bizonyítani fogjuk, hogy $A^{k+1}=\begin{bmatrix}\cos\frac{(k+1)\pi}{2} & -\sin\frac{(k+1)\pi}{2}\\ \sin\frac{(k+1)\pi}{2} & \cos\frac{(k+1)\pi}{2}\end{bmatrix}$ is igaz. Valóban, a trigonometriai alapképletek alapján

$$A^{k+1}=A\cdot A^k=\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2}\\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\cos\frac{k\pi}{2} & -\sin\frac{k\pi}{2}\\ \sin\frac{k\pi}{2} & \cos\frac{k\pi}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\frac{(k+1)\pi}{2} & -\sin\frac{(k+1)\pi}{2}\\ \sin\frac{(k+1)\pi}{2} & \cos\frac{(k+1)\pi}{2}\end{bmatrix}.$$

3. feladat: Ha $A=\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 1\\ -1 & \sqrt{3}\end{bmatrix}$, akkor számítsuk ki az A^n hatványt $\forall n\in\mathbb{N}^*$ esetén!

Megoldás: a mátrixunk így is felírható, hogy $A=2\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$. Így a változócsere már egyértelmű, hiszen $\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$. Ekkor azt kapjuk, hogy $A=2\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{6} & \sin\frac{\pi}{6}\\ -\sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6}\end{bmatrix}$. Most, a trigonometriai alapképletek segítségével azonnal megkapjuk, hogy

$A^2=2^2\begin{bmatrix}\cos\frac{2\pi}{6} & \sin\frac{2\pi}{6}\\ -\sin\frac{2\pi}{6} & \cos\frac{2\pi}{6}\end{bmatrix}$, $A^3=2^3\begin{bmatrix}\cos\frac{3\pi}{6} & \sin\frac{3\pi}{6}\\ -\sin\frac{3\pi}{6} & \cos\frac{3\pi}{6}\end{bmatrix}$, $A^4=2^4\begin{bmatrix}\cos\frac{4\pi}{6} & \sin\frac{4\pi}{6}\\ -\sin\frac{4\pi}{6} & \cos\frac{4\pi}{6}\end{bmatrix}$. Ezért most megfogalmazhatjuk a sejtéseinket, hogy $A^k=2^k\begin{bmatrix}\cos\frac{k\pi}{6} & \sin\frac{k\pi}{6}\\ -\sin\frac{k\pi}{3} & \cos\frac{k\pi}{6}\end{bmatrix}$. Így indukcióval bizonyítani fogjuk, hogy $A^{k+1} = 2^{k+1}\begin{bmatrix} \cos\frac{(k+1)\pi}{6} & \sin\frac{(k+1)\pi}{6} \\ -\sin\frac{(k+1)\pi}{6} & \cos\frac{(k+1)\pi}{6} \end{bmatrix}$ is igaz. Valóban, a trigonometriai alapképletek alapján

$$A^{k+1} = A \cdot A^k = 2 \cdot 2^k \cdot \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & \sin\frac{\pi}{6} \\ -\sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\frac{k\pi}{6} & \sin\frac{k\pi}{6} \\ -\sin\frac{k\pi}{6} & \cos\frac{k\pi}{6} \end{bmatrix} = 2^{k+1}\begin{bmatrix} \cos\frac{(k+1)\pi}{6} & \sin\frac{(k+1)\pi}{6} \\ -\sin\frac{(k+1)\pi}{6} & \cos\frac{(k+1)\pi}{6} \end{bmatrix}.$$

4. feladat: Ha $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, akkor számítsuk ki az A^n hatványt $\forall n \in \mathbb{N}^*$ esetén!

Megoldás: a mátrixunk így is felírható, hogy $A = \sqrt{2}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$. Így a helyettesítés már egyértelmű, hiszen $\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4}$. Ekkor azt kapjuk, hogy $A = \sqrt{2}\begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{4} \\ -\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{bmatrix}$. Most, a trigonometriai alapképletek segítségével azonnal megkapjuk, hogy

$$A^2 = \sqrt{2}^2\begin{bmatrix} \cos\frac{2\pi}{4} & \sin\frac{2\pi}{4} \\ -\sin\frac{2\pi}{4} & \cos\frac{2\pi}{4} \end{bmatrix},\ A^3 = \sqrt{2}^3\begin{bmatrix} \cos\frac{3\pi}{4} & \sin\frac{3\pi}{4} \\ -\sin\frac{3\pi}{4} & \cos\frac{3\pi}{4} \end{bmatrix},\ A^4 = \sqrt{2}^4\begin{bmatrix} \cos\frac{4\pi}{4} & \sin\frac{4\pi}{4} \\ -\sin\frac{4\pi}{4} & \cos\frac{4\pi}{4} \end{bmatrix}.$$

Ezért most megfogalmazhatjuk a sejtéseinket, hogy $A^k = \sqrt{2}^k\begin{bmatrix} \cos\frac{k\pi}{4} & \sin\frac{k\pi}{4} \\ -\sin\frac{k\pi}{4} & \cos\frac{k\pi}{4} \end{bmatrix}$. Így indukcióval bizonyítani fogjuk, hogy $A^{k+1} = \sqrt{2}^{k+1}\begin{bmatrix} \cos\frac{(k+1)\pi}{4} & \sin\frac{(k+1)\pi}{4} \\ -\sin\frac{(k+1)\pi}{4} & \cos\frac{(k+1)\pi}{4} \end{bmatrix}$ is igaz. Valóban, a trigonometriai alapképletek alapján könnyen megkapjuk, hogy

$$A^{k+1} = A \cdot A^k = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}^k \cdot \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{4} \\ -\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\frac{k\pi}{4} & \sin\frac{k\pi}{6} \\ -\sin\frac{k\pi}{4} & \cos\frac{k\pi}{4} \end{bmatrix} = \sqrt{2}^{k+1}\begin{bmatrix} \cos\frac{(k+1)\pi}{4} & \sin\frac{(k+1)\pi}{4} \\ -\sin\frac{(k+1)\pi}{4} & \cos\frac{(k+1)\pi}{4} \end{bmatrix}$$

Az előző feladatok alapján könnyen észrevehető, hogy a megoldott feladatok így általánosíthatók:

5. feladat: Ha $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, akkor számítsuk ki az A^n hatványt $\forall n \in \mathbb{N}^*$ esetén, ha $a, b \in \mathbb{R}$!

Megoldás: a mátrixunk így is felírható, hogy $A=\sqrt{a^2+b^2}\begin{bmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{bmatrix}$.

Mivel $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$, ezért létezik olyan $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ szög, amelyre $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos t$ és $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin t$. Ekkor $A=\sqrt{a^2+b^2}\begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \cos t & \sin t \end{bmatrix}$. Most, a trigonometriai alapképletek segítségével azonnal megkapjuk, hogy

$A^2=\sqrt{a^2+b^2}^2\begin{bmatrix} \cos 2t & -\sin 2t \\ \sin 2t & \cos 2t \end{bmatrix}$, $A^3=\sqrt{a^2+b^2}^3\begin{bmatrix} \cos 3t & -\sin 3t \\ \sin 3t & \cos 3t \end{bmatrix}$, $A^4=\sqrt{a^2+b^2}^4\begin{bmatrix} \cos 4t & -\sin 4t \\ \sin 4t & \cos 4t \end{bmatrix}$

. Ezért most megfogalmazhatjuk a sejtéseinket, hogy $A^k=\sqrt{a^2+b^2}^k\begin{bmatrix} \cos kt & -\sin kt \\ \sin kt & \cos kt \end{bmatrix}$. Így indukcióval bizonyítani fogjuk, hogy $A^{k+1}=\sqrt{a^2+b^2}^{k+1}\begin{bmatrix} \cos(k+1)t & -\sin(k+1)t \\ \sin(k+1)t & \cos(k+1)t \end{bmatrix}$ is igaz. Valóban, a trigonometriai alapképletek alapján könnyen megkapjuk, hogy

$$A^{k+1}=A\cdot A^k=\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2}^k\begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \cos t & \sin t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos kt & -\sin kt \\ \sin kt & \cos kt \end{bmatrix}=\sqrt{a^2+b^2}^{k+1}\begin{bmatrix} \cos(k+1)t & -\sin(k+1)t \\ \sin(k+1)t & \cos(k+1)t \end{bmatrix}$$

Ez utóbbi mintájára megfogalmazhatjuk a következő feladatot is:

6. feladat: Ha $A=\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, akkor számítsuk ki az A^n hatványt $\forall n\in\mathbb{N}^*$ esetén, ha $a,b\in\mathbb{R}$!

Megoldás: mivel ennek a feladatnak a megoldása teljesen azonos az előző feladat megoldásával, ezért a végrehajtását az érdeklődő Olvasóra bízzuk!

Végezetül, a bemutatottak jobb elmélyítése végett, az érdeklődő Olvasónak javasoljuk a következő feladatok megoldását:

Gyakorló feladatok II.

A következő A mátrixok esetén számítsuk ki az A^n hatványt $\forall n\in\mathbb{N}^*$ esetén:

(1) $A=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ (2) $A=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ (3) $A=\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ (4) $A=\begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}$ (5) $A=\begin{bmatrix} a & -a \\ a & a \end{bmatrix}$

(6) $A=\begin{bmatrix} 1+\cos a & -\sin a \\ \sin a & 1+\cos a \end{bmatrix}$ (7) $A=\begin{bmatrix} 1-\cos a & \sin a \\ -\sin a & 1-\cos a \end{bmatrix}$ (8) $A=\begin{bmatrix} 1 & tga \\ -tga & 1 \end{bmatrix}$ (9) $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(10) $A=\begin{bmatrix} 1 & -ctga \\ ctga & 1 \end{bmatrix}$ ahol $a\in\mathbb{R}.$ és a kifejezések értelmezve vannak.