Másodrendű mátrixok hatványozásáról

V.

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

Ebben a részben, a másodrendű mátrix hatványozásának egy különös és érdekes alkalmazásáról írunk.

Tekintsük az $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, $f:\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{d}{a}\right\}\to\mathbb{R}$ elsőfokú racionális függvényt. Értelmezzük a következő sorozatot: $f_1=f$, $f_2=f\circ f$, $f_3=f\circ f\circ f$,..., $f_n=\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{n-szer}$. Rekurzióval értelmezve tehát $f_n=f\circ f_{n-1}=f_{n-1}\circ f$ (1).

Célul tűzzük ki az $f_n(x)$ kiszámolását, az előbbi törtfüggvény esetén.

A feladat megoldása érdekében induljunk ki a következőből:

$$f_2(x)=\left(f\circ f\right)(x)=\frac{af(x)+b}{cf(x)+d}=\frac{a\dfrac{ax+b}{cx+d}+b}{c\dfrac{ax+b}{cx+d}+d}=\frac{(a^2+bc)x+b(a+d)}{c(a+d)x+d^2+bc}\quad(2)$$

Ennek alapján rendre jelöljük $f_1(x)=f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}=\dfrac{a_1x+b_1}{c_1x+d_1}$, $f_2(x)=\dfrac{a_2x+b_2}{c_2x+d_2}$ és általában $f_n(x)=\dfrac{a_nx+b_n}{c_nx+d_n}$. Ezért, ha $f_{n+1}(x)=\dfrac{a_{n+1}x+b_{n+1}}{c_{n+1}x+d_{n+1}}$ (3) akkor mivel

$$f_{n+1}(x)=\left(f_n\circ f\right)(x)=f_n\left(f(x)\right)=\frac{a_nf(x)+b_n}{c_nf(x)+d_n}=\frac{a_n\dfrac{ax+b}{cx+d}+b_n}{c_n\dfrac{ax+b}{cx+d}+d_n}=\frac{(aa_n+cb_n)x+(ba_n+db_n)}{(ac_n+cd_n)x+(bc_n+dd_n)}\quad(4),$$

ezért a (3) és (4) azonosításából a következő rekurziókkal értelmezett a_n,b_n,c_n,d_n sorozatokat kapjuk:

$a_{n+1}=aa_n+cb_n$, $b_{n+1}=ba_n+db_n$, $c_{n+1}=ac_n+cd_n$, $d_{n+1}=bc_n+dd_n$ ahol $a_1=a,b_1=b,c_1=c,d_1=d$.

A (2)-es összefüggésben figyeljünk fel csak a következő kifejezésekre: a^2+bc , $b(a+d)$ $c(a+d)$, d^2+bc. Könnyen észrevehetjük, hogy ha az $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ mátrixot tekintjük, akkor $A^2=\begin{pmatrix}a^2+bc&b(a+d)\\c(a+d)&d^2+bc\end{pmatrix}$, vagyis a szóban forgó négy kifejezés, éppen az A^2 mátrixhatvány elemei. Ez utóbbi, a már bevezetett jelöléssel így írható: $A^2=\begin{pmatrix}a_2&b_2\\c_2&d_2\end{pmatrix}$ ahol $a_2=aa_1+cb_1$, $b_2=ba_1+db_2$, $c_2=ac_1+cd_1$, $d_2=bc_1+dd_1$ és $a_1=a,b_1=b,c_1=c,d_1=d$.

Ha most indukcióval feltételezzük, hogy $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$, akkor mivel $A^{n+1} = A \cdot A^n$ vagyis

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ c_{n+1} & d_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \text{ tehát } \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ c_{n+1} & d_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa_n + cb_n & ba_n + db_n \\ ac_n + cd_n & bc_n + dd_n \end{pmatrix}$$

ahonnan a már ismert $a_{n+1} = aa_n + cb_n$, $b_{n+1} = ba_n + db_n$, $c_{n+1} = ac_n + cd_n$, $d_{n+1} = bc_n + dd_n$ ahol $a_1 = a, b_1 = b, c_1 = c, d_1 = d$ rekurziót kapjuk. Tehát az indukciós feltevésünk helyes.

Ezek alapján kijelenthető a jelen dolgozatunk központi eredménye:

Tétel: Ha $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, $f : \mathbb{R} \setminus \left\{ -\dfrac{d}{a} \right\} \to \mathbb{R}$ és $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, valamint $f_1 = f$, $f_2 = f \circ f$, $f_3 = f \circ f \circ f$,..., $f_n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n-szer}$, tehát $f_n = f \circ f_{n-1} = f_{n-1} \circ f$, akkor $f_n(x) = \dfrac{a_n x + b_n}{c_n x + d_n}$ ahol az a_n, b_n, c_n, d_n sorozat tagjait az $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ mátrixhatványból határozzuk meg.

A tétel bizonyítása tulajdonképpen kiolvasható az előbbi eszmefuttatásokból.

Nézzünk most a Tételnek egy alkalmazását:

Alkalmazás: Ha $f(x) = \dfrac{3x+1}{-x+1}$, $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, akkor számítsuk ki az $f_n(x)$ függvényt, ahol $f_n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n-szer}$ minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

Megoldás: Ha megpróbálnánk kiszámítani néhány függvényösszetételt, ezt kapnánk: $f(f(x)) = \dfrac{8x+4}{-4x}$, $f(f(f(x))) = \dfrac{20x+12}{-12-4}$, de ezekből nem jövünk rá egy könnyen, hogy a feladatot esetleg indukcióval bizonyítsuk. Éppen ezért felírjuk, hogy a függvényhez tartozó mátrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, és nem marad hátra mint az, hogy kiszámítsuk az A^n hatványt. Ezt a karakterisztikus egyenlet módszerével tesszük meg (lásd a IV. részt). Mivel $t = 4, d = 4$ ezért a karakterisztikus egyenlet $A^2 - 4A + 4I_2 = O_2$, tehát $A^n = x_n \cdot A + y_n \cdot I_2$ ahol $x_{n+1} - 4 \cdot x_n + 4 \cdot x_{n-1} = 0$, és $y_{n+1} - 4 \cdot y_n + 4 \cdot y_{n-1} = 0$. továbbá $x_0 = 0, y_0 = 1$ valamint $x_1 = 1, y_0 = 0$. A két rekurziós egyenletnek ugyanaz a karakterisztikus egyenlete, $r^2 - 4r + 4 = 0$ amelynek a két egybeeső valós gyöke $r_1 = r_2 = 4$. Tehát $x_n = (2\alpha + \beta n) \cdot 2^{n-1}$ és $x_0 = 0, x_1 = 1$, valamint $y_n = (2\gamma + \delta n) \cdot 2^{n-1}$ és $y_0 = 1, y_1 = 0$. A kezdetértéki feltételek mellett, számolásokkal azonnal adódik, hogy $A^n = x_n \cdot A + y_n \cdot I_2 = \begin{pmatrix} 2^{n-1}(n+2) & n \cdot 2^{n-1} \\ -n \cdot 2^{n-1} & -2^{n-1}(n-2) \end{pmatrix}$. Ennek alapján tehát felírható a kérdéses függvényösszetétel eredménye: $f_n(x) = 2^{n-1} \dfrac{(n+2)x + n}{-nx - (n-2)}$. Ezzel a feladatot megoldottuk. Megjegyezzük, hogy hasonló feladatot, az érdeklődő Olvasó könnyűszerrel szerkeszthet egymaga is, amit a bemutatottak mintájára meg is oldhat.