**Szélsőérték problémák elemi megoldása
III. rész
Függvények szélsőértéke**

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

Ebben a részben egy, vagy többváltozós elemi függvény szélsőértékeit határozzuk meg, elemi módszerekkel. A továbbiakban a módszerek változatosságára szeretnénk figyelmet fordítani.

1. **példa**: Határozzuk meg az  függvény minimumát, ha .

**Megoldás**: Felírható, hogy  mert  minden

 esetén, és egyenlőség  esetben áll fenn.

1. **példa:** Határozzuk meg az ,  függvény legkisebb értékét!

**Megoldás**: Mivel  minden esetén, és egyenlőség csak az esetben áll fenn, ezért az  választással  adódik, és egyenlőség

a  esetben áll fenn.

1. **példa:** Határozzuk meg az  függvény maximumát, ha .

Megoldás: felírható, hogy  és ez akkor minimális, ha maximális, és ez akkor igaz, ha minimális, de ez akkor igaz, ha

, így hát .

1. **példa:** Határozzuk meg az  függvény minimumát, ha !

**Megoldás**: Felírható, hogy , és egyenlőség csak az , vagyis  esetben áll fenn.

1. **példa:** Határozzuk meg az  függvény szélsőértékeit, ha .

**Megoldás**: Legyen , ahonnan  valós x esetén teljesül, ezért

, ami alapján  vagyis .

1. **példa:** Határozzuk meg az ,  függvény szélsőértékeit!

**Megoldás**: Felírható, hogy . És mivel az

 függvény szigorúan csökkenő, ezért .

1. **példa:** Határozzuk meg az ,  függvény szélsőértékeit!

**Megoldás**: Vizsgáljuk meg a függvény monotonitását. Legyen . Ekkor felírható, hogy

 ami azt jelenti, hogy az f függvény szigorúan csökkenő, ezért 

1. **példa**: Határozzuk meg az ,  függvény szélsőértékeit!

**Megoldás**: Vegyük észre, hogy  és az  minden  esetén alapján, ha *x> 1*, akkor . Ellenben, ha x< 1, akkor mivel  és szigorúan csökkenő, ezért  és egyenlőség csak x= 0 esetben áll fenn. Vegyük észre, hogy az m= 1 a függvénynek csak lokális minimuma, úgyszintén az M= -1 is csak lokális maximuma.

1. **példa**: Határozzuk meg az  kifejezés legkisebb és legnagyobb értékét, ha !

**Megoldás**: Mivel  és egyenlőség csak az  esetben áll fenn, ezért az  és választással felírható, hogy:  , vagyis , egyenlőség akkor áll fenn, ha , vagyis .

 Másfelől  , és egyenlőség akkor áll fenn, ha  vagy .

1. **példa**: Határozzuk meg az  kifejezés legkisebb és legnagyobb értékét, ha !

**Megoldás**: Ismert a Cauchy-Buniakovsky-Schwarz féle egyenlőtlenség sajátos esete, miszerint:

. Ha most  akkor

, ahonnan , ezért .

1. **példa:** Adjuk meg az  függvény szélsőértékeit, ha  !

**Megoldás**: Végezzük el az alábbi átalakításokat: .

Ellenben , így felírható, hogy

. Vezessük most be a

 változócserét. Így a  függvény szélsőértékeit kell meghatároznunk, ahol  . De mivel az *a* változó nem veheti föl az 4 értéket, ezért a g függvény esetén nem írható fel, hogy  hanem arra következtethetünk, hogy a g függvény parabolájának a csúcsa a  pontban van, és mivel  , ezért  , vagyis a parabolának csak a baloldali leszálló ágáról van szó, ahol a g függvény monoton csökkenő a  intervallumon, ezért  és ezek adják egyben az f függvény szélsőértékeit is.

1. **példa:** Határozzuk meg az ,  függvény szélsőértékeit!

**Megoldás:** Mivel  és egyenlőség csak az  esetben áll fenn, ezért

 vagyis . Egyenlőség esetben áll fenn. Másfelől becsüljük meg az f(x)-5 különbséget! felírható, hogy:



 = ha , ezért . Egyenlőség x=0 vagy x=1 esetben áll fenn.

1. **példa**: Határozzuk mg az  függvény minimumát, ha  és m, n természetes számok!

**Megoldás**: Írjuk fel a számtani és mértani középarányosok közötti egyenlőtlenséget m+n tag esetén, a következő választással:

 

Tehát , vagyis ez utóbbi kifejezés az f függvény minimuma, és ezt az  esetben veszi föl.

1. **példa**: Határozzuk meg az  függvény szélsőértékeit!

**Megoldás**: Nyilvánvaló, hogy az  függvénynek akkor vannak szélsőértékei, mint amikor a . Ennek a szélsőértékeit könnyen meghatározhatjuk, ha meghatározzuk a  függvény szélsőértékeit. Alkalmazzuk a számtani és a mértani közepek egyenlőtlenségét a következő választással: , vagyis . Egyenlőség  esetben áll fenn, ekkor h-nak helyi maximuma, így f-nek minimuma van, és minf(x)= f(4)= -245. Másfelől, ha  akkor a h függvénynek helyi minimuma van, hiszen és egyenlőség x=0 esetben áll fenn, ez lesz az f maximum helye, amelyre maxf(x)=f(0)=11.

1. **példa:** Mennyi az minimuma, ha  és ?

**Megoldás**: Mivel minden  esetén  és egyenlőség csak  esetben igaz, ezért , ahonnan , egyenlőség  esetben igaz, az 

 alapján  és  esetben áll fenn.

1. **példa:** Ha , akkor határozzuk meg az  kifejezés szélsőértékeit!

**Megoldás**: Legyen  és az  összefüggés alapján, mivel  , ezért

 megoldható a valós számok halmazán, ezért , ahonnan .

1. **példa**: A Descartes-féle síkbeli derékszög\_ koordinátarendszer mely pontjaira teljesül, hogy  és  maximális?

**Megoldás**: Ismert az abszolút érték háromszög egyenlőtlensége, miszerint  és egyenlőség akkor áll fenn, ha a két szám egyforma előjelű. Továbbá a számtani és négyzetes középarányosok egyenlőtlensége alapján felírható, hogy:



Egyenlőség azokra a számpárokra áll fenn, amelyekre az ** és *x*, *y* azonos előjelű, és

. Ezért a feltételnek eleget tevő számpárok  . Ezekre az értékekre lesz a  maximális.

1. **példa**: Mennyi az  kifejezés minimuma, ha ?

**Megoldás**: Végezzük el az *a=x-1* és *b=y-1* változócserét. Ekkor, az egyenlőtlenség alapján , ugyanis  és , így , Egyenlőség  vagyis esetben áll fenn.

1. **példa**: Határozzuk meg az  kifejezés minimumát, ha .

**Megoldás**: Mivel  minden  esetén, ezért , így hát

, egyenlőség  esetben áll fenn.

1. **példa**: Mennyi az  minimuma, ha ?

**Megoldás**: Mivel minden  esetén  és egyenlőség csak  esetben igaz, ezért felírható, hogy: , ezért és egyenlőség az  áll fenn.

1. **példa**: Ha  és , akkor mennyi az  kifejezés maximuma illetve minimuma?

**Megoldás**: Mivel  és egyenlőség az  esetben áll fenn, ezért az

 esetben felírható, hogy , ahonnan , egyenlőség  esetben áll fenn. Másfelől felírható, hogy  vagyis  . Egyenlőség akkor áll fenn, ha a három szám közül kettő  -el egyenlő, a harmadik pedig az alapján *2*-vel egyenlő.

1. **példa**: Az  valós számokra teljesülnek az  és az  egyenlőségek. Milyen korlátok között változhatnak az  számok?

**Megoldás**: Az egyenletrendszer így is felírható:  és  vagyisés . Képezzük azt a másodfokú egyenletet, amelynek a gyökei :

. Mivel az egyenletnek valós gyökei kell legyenek, ezért. És mivel az eredeti egyenlet rendszer szimmetrikus az , ezért igaz az is, hogy és .

1. **példa**: Határozzuk meg az  függvény minimumát, ha x>0, y>0 és z>0 valós számok!

**Megoldás**: Alkalmazzuk a számtani és a mértani közepek közötti egyenlőtlenséget 6 tag esetén, a következő választással:

 ahonnan . Egyenlőség az

 esetben áll fenn.

**Szakirodalom**

[1] Nicholas D. Kazarinoff: Geometriai egyenlőtlenségek, Gondolat Kiadó, 1980

[2] Sándor József: Geometriai egyenlőtlenségek, Dacia Könyvkiadó, Cluj-Napoca, 1988

[3] Major Zoltán: Egy izgalmas szélsőértékfeladat-család, Graphisoft Kft, 1993

[4] Vigné Dr. Lencsés Ágnes: A problémamegoldó képesség fejlesztése szélsőérték feladatok megoldásával, 2007 (tanulmány)

[5] Kapitány Benedek: Szélsőérték-feladatok különböző megoldási módszerei, ELTE, 2012 (szakdolgozat)

[6] Kapitány Benedek: Az izoperimetrikus egyenlőtlenség, ELTE, 2013 (szakdolgozat)

[7] Ábrahám Gábor: Szélsőérték feladatok elemi megoldása 2013 (http://matek.fazekas.hu/images/cikkek/20130112\_cikkek\_abrahamgabor\_szelsoertekelemi.pdf)

[8] Berzsenyi Viktória: Szélsőérték-feladatok különböző megoldási módszerei, ELTE, 2010 (szakdolgozat)

[9] Lengyel Csilla Mária: Szélsőérték-feladatok különböző megoldási módszerei, ELTE, 2012 (szakdolgozat)

[10] Hódi Endre: Szélsőérték-feladatok elemi megoldása, Typotex, Budapest, 1994