

Tippek, trükkök, ötletek határozatlan integrálok kiszámolásához

I. rész

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

A XII. osztályos matematikai analízis egyik legfontosabb feladata az, hogy a tanulók tudjanak helyesen integrálokat számolni. Ez azonban nem is annyira könnyű feladat, hiszen a primitív számolás nagyon sokszínű és változatos. A jelenlegi tankönyvek sok anyagrészt igen átfogóan tárgyalnak, mint például a racionális törtek integrálását, a parciális integrálást, vagy a változócsere módszereit. Mindemellett azonban néhány támpontot szeretnék nyújtani azon tanulóknak, akik az útjuk kezdetén vannak, és most ismerkednek az integrálszámolás rejtjelmeivel. Ezt a dolgozatot amolyan „kedvcsinálónak” szántam. Ebben az első részben a határozatlan integrálok számolásáról írok, a következőben pedig a határozott integrálok számolásáról. A két dolgozat egyike sem törekszik teljességre semmilyen szempontból sem, csupán módszertani segítséget szeretnék nyújtani az érdeklődő Olvasónak.

A dolgozat **mottója**: *tanulj meg jelekből olvasni!*

Ez azért fontos, mert ha a kiszámítandó integrált jól szemügyre vesszük, minden részletet, összefüggést, kapcsolatot észreveszünk, akkor ez már „árulkodik” a kiszámolási módjáról, vagyis a megoldás kezdetéről és a menetéről is.

Mindenek előtt azonban jegyezzük meg, hogy nagy fontossággal bírnak a következők:

- 1) Az elemi függvények deriváltjainak a részletes és pontos ismerete nélkül, nem lehet belevágni az integrál számolásba! Továbbá jó tudni, az összetett függvények deriválási szabályait, de itt tulajdonképpen elég csak egyetlen képletet megjegyezni, a következőt: $(f(g(x)))' = g'(x) \cdot f'(g(x))$. Ha az elemi függvények deriváltja jól megy, akkor ezen képlet segítségével azonnal megkaphatjuk bármelyik összetett függvény deriváltját! Így nem kell azokat mind megtanulni! Szükséges ismerni a deriválható függvényekkel végezhető fontosabb műveleteket:

$$a) (f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x) \qquad b) (c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$$

$$c) (f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$d) \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} \qquad e) (f^n(x))' = n \cdot f'(x) \cdot f^{n-1}(x)$$

- 2) Nagyon megkönnyíti a munkánkat, ha jól értjük a differenciálási műveletet: ennek az értelmezése $d(f(x)) = f'(x)dx$. Mivel a differenciálást a derivált segítségével értelmezzük, ezért az a) - e) tulajdonságok a differenciálás esetén is igazak.

Ellenben kihangsúlyoznánk, hogy a differenciál értelmezése nagy fontossággal bír a változó csere (helyettesítési módszer) alkalmazásánál és jobb megértésénél, ahol javunkra válik, ha ilyesmiket észreveszünk, mint például:

$$\cos x dx = d(\sin x), \sin x dx = -d(\cos x), x dx = \frac{1}{2} d(x^2) \text{ vagy éppen } x dx = \frac{1}{2} d(x^2 + c)$$

ahol c tetszőleges állandó, $\frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2d(\sqrt{x})$, $\frac{1}{x} dx = d(\ln x)$ stb. Mint említettük,

ennek nagy hasznát vesszük a változócsere leegyszerűsítésében, mint például:

Az $I = \int \operatorname{tg} x dx$ „klasszikus” kiszámolása gyakran így történik: $I = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$ és most

legyen $\cos x = t \Rightarrow -\sin x dx = dt$ tehát $I = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| = -\ln|\cos x| + C$. De nézzük

csak, hogy mennyivel természetesebb és áttekinthetőbb a következő:

$$I = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C. \text{ Ennek mintájára még két példa:}$$

$$I = \int \cos^3 x \cdot \sin x dx = -\int \cos^3 x d(\cos x) = -\frac{\cos^4 x}{4} + C, \text{ vagy}$$

$$I = \int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx = \int \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} = \ln|\sin x + \cos x| + C$$

- 3) Az elemi függvények határozatlan integráljait (primitívjeit) is részletesen, pontosan és gyorsan kell tudni! Ezek nélkül a továbbiakban nem tudunk haladni! Szükséges ismerni a primitíválható függvényekkel végezhető fontosabb műveleteket:

$$\text{a) } \int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx \quad \text{b) } \int (k \cdot f(x)) dx = k \cdot \int f(x) dx$$

- 4) Tisztába kell lenni egy $f(x)$ függvény $F(x)$ primitív függvényének az értelmezésével, miszerint $F'(x) = f(x)$ amit határozatlan integrállal így írunk: $\int f(x) dx = F(x) + C$

- 5) Nélkülözhetetlen a következő képlet: $\int dx = x + C$ és így $\int a dx = a \int dx = ax + C$ hiszen az integrálás és a differenciálás egymásnak fordított művelete!

Kezdjük talán a legegyszerűbbel ötlettel:

1. Ha az integrandus alatti kifejezés pontos derivált: $\int f'(x) dx = f(x) + C$

Amilyen egyszerű ez a ténymegállapítás, éppen olyan kemény dió is lehet, ha rejtettebb formában jelenik meg, főleg ha az $f(x)$ függvény valamilyen összetettebb függvény. Különösen érdemes ráfigyelni a következő helyzetekre:

$$\int (f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)) dx = \int (f(x) \cdot g(x))' dx = f(x)g(x) + C \text{ vagy}$$

$$= \int \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} dx = \int \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' dx = \frac{f(x)}{g(x)} + C \text{ vagy éppen más helyzet.}$$

Nézzünk csak néhány példát:

$$\text{1.1) } I = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(x^2+1)'}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int (\sqrt{x^2+1})' dx = \sqrt{x^2+1} + C,$$

$$\text{1.2) } I = \int (\sin x + x \cos x) dx = \int (x \sin x)' dx = x \sin x + C \text{ vagy ennél álcázottabb:}$$

$$1.3) \quad I = \int \frac{(x-1)e^x}{x^2} Dx = \int \frac{e^x x - e^x}{x^2} dx = \int \left(\frac{e^x}{x} \right)' dx = \frac{e^x}{x} + C . \text{ Vagy egy jóval nehezebb:}$$

$$1.4) \quad I = \int \left(\frac{x}{\cos x + x \sin x} \right)^2 dx = \int \left(\frac{\sin x - x \cos x}{\cos x + x \sin x} \right)' dx = \frac{\sin x - x \cos x}{\cos x + x \sin x} + C$$

2. Ha az integrandus közvetlen (direkt integrálható) elemi függvényekből áll:

Ezek a közvetlen képletek alapján megoldható feladatok, semmi nehézség nincs ebben, alkalmazzuk a 3) alatti a) és b) tulajdonságokat, például:

$$I = \int (2x^2 - 3e^x + \sin x + 2) dx = 2 \int x^2 dx - 3 \int e^x dx + \int \sin x dx + 2 \int dx = 2 \frac{x^3}{3} - 3e^x + \cos x + 2x + C$$

3. Ha az integrandus csak $x^m, \frac{1}{x^n}, \sqrt[p]{x^q}, \frac{1}{\sqrt[r]{x^s}}$ alakú tagokat tartalmaz:

Ilyenkor figyelembe vesszük, hogy $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ valamint $\sqrt[p]{x^q} = x^{\frac{q}{p}}$ és $\frac{1}{\sqrt[r]{x^s}} = x^{-\frac{s}{r}}$. Példa:

$$I = \int \left(\sqrt{x} - \frac{2}{x^3} + 3\sqrt[3]{x^2} \right) dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx - 2 \int x^{-3} dx + 3 \int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + x^{-2} + \frac{9}{5} x^{\frac{5}{3}} + C .$$

4. Ha az integrandus nem integrálható közvetlenül, csak közvetve:

Ilyenkor a feladat egyszerű módosításával visszavezetjük a feladatot közvetlen integrálható feladatra. A módszer kapcsán három lehetőséget említünk meg:

a) **A nevező egyetlen kifejezésből (tagból) áll, és a számláló minden tagját osztjuk ezzel:** például

$$4.1) \quad I = \int \frac{x+2}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{x}} dx + 2 \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx + 2 \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + 4x^{\frac{1}{2}} + C ,$$

$$4.2) \quad I = \int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx = \int \frac{\sqrt{x^4 + \frac{1}{x^4} + 2}}{x^3} dx = \int \frac{\sqrt{x^4 + 2x^2 + 1}}{x^5} dx = \int \frac{x^2 + 1}{x^5} dx = \\ = \int \frac{x^2}{x^5} dx + \int \frac{1}{x^5} dx = \int x^{-3} dx + \int x^{-5} dx = \frac{x^{-2}}{2} + \frac{x^{-4}}{4} + C = \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{4x^4} + C , \text{ más példa}$$

$$4.3) \quad I = \int \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx = \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{(1+x^2)(1-x^2)}} dx + \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{(1+x^2)(1-x^2)}} dx = \\ = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \arcsin x + \operatorname{arcsinh} x + C .$$

b) **A számlálót és a nevezőt is megszorozzuk ugyanazzal a kifejezéssel, hogy így direkt integrálható legyen:** például 4.4)

$$I = \int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = - \int \frac{d(\cos x)}{1 - \cos^2 x} = \int \frac{dy}{y^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{y-1}{y+1} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$$

$$4.4) \quad I = \int \frac{dx}{x^3 + x} = \int \frac{xdx}{x^4 + x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{x^2(x^2 + 1)} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 + 1} \right) d(x^2) =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{x^2} - \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2} (\ln x^2 - \ln(x^2+1)) = \ln \sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} + C .$$

c) A számlálóban hozzáadással és kivonással kialakítjuk a nevezőt (teveszabály):

$$4.5) I = \int \frac{-2x^2}{x^2+1} = -2 \int \frac{x^2}{x^2+1} dx = -2 \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx = -2 \int 1 dx + 2 \int \frac{1}{x^2+1} dx = -2x + 2 \arctg x + C$$

$$4.6) I = \int \frac{x^3}{x+3} dx = \int \frac{x^3+3x^2-3x^2}{x+3} dx = \int x^2 dx - 3 \int \frac{x^2+3x-3x}{x+3} dx = \frac{x^3}{3} - \int x dx + 9 \int \frac{x}{x+3} dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 9 \int \frac{x+3-3}{x+3} dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 9 \int dx - 27 \int \frac{d(x+3)}{x+3} = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 9x - 27 \ln(x+3) + C$$

$$4.7) I = \int \frac{1+x^4}{1+x^6} dx = \int \frac{1-x^2+x^4}{1+x^6} dx + \int \frac{x^2}{1+x^6} dx = \int \frac{1}{1+x^2} dx + \frac{1}{3} \int \frac{d(x^3)}{1+(x^3)^2} dx =$$

$$= \arctg x + \frac{1}{3} \arctg x^3 + C .$$

5. A társintegrál módszere:

A módszernek a neve is mutatja, hogy ha van egy kiszámítandó integrálunk, „segítségül hívhatunk” egy másik integrált, és ha sikerül felírni *a két integrál között két összefüggést*, akkor kétismeretlenes egyenletrendszert kaphatunk, és ezt megoldva, megkapjuk a keresett integrált. Nézzünk is egy példát:

Ha $I = \int \frac{\cos x}{a \sin x + b \cos x} dx$ ahol $a, b \in \mathbb{R}^*$ akkor ésszerűnek tűnik, ha társintegrálnak választjuk

a $J = \int \frac{\sin x}{a \sin x + b \cos x} dx$. Könnyen látható, hogy $bI + aJ = \int dx = x$ (i). Továbbá

$$aI - bJ = \int \frac{a \cos x - b \sin x}{a \sin x + b \cos x} dx = \int \frac{d(a \sin x + b \cos x)}{a \sin x + b \cos x} = \ln |a \sin x + b \cos x| \text{ (ii).}$$

Ha most megoldjuk az (i) és (ii) adta egyenlet-rendszert azt kapjuk, hogy

$$I = \frac{a \ln |a \sin x + b \cos x| + bx}{a^2 + b^2} + C .$$

Bizonyára sokan hiányolják, hogy miért is nincs integrálási módszer az $\int u(x)v(x)dx$ elvégzésére? Pedig van, csak *nem írható fel*, hogy $\int u(x)v(x)dx = \int u(x)dx \cdot \int v(x)dx$ mint ahogyan az összeg vagy különbség esetén tettük.

A szorzatok integrálására találták ki mind a parciális integrálást, mint a változócsere I. módszerét! Előbb nézzük a parciális integrálás módszerét!

6. Szorzatfüggvények integrálása parciális integrálással:

A parciális integrálás képlete: $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$. Ez a deriválható függvények c) tulajdonsága alapján azonnal adódik. A képletet azért nevezik „parciális” integrálási módszernek, mert ezzel nem biztos, hogy megkaptuk az eredeti szorzat primitív függvényét, hanem helyette egy másik integrált kaptunk, tehát a feladatot úgymond „részlegesen” (parciálisan) oldottuk meg. Ellenben ha a feladat elején „jól választjuk meg” a

két függvényt, akkor az utóbbi integrál már könnyebb mint az eredeti, így egy vagy több lépésben kiszámolható.

Az eredeti integrálunk tehát egy $\int u(x)v(x)dx$ alakú integrál, ahol mi kell célszerűen megválasszuk az $f(x)$ és $g'(x)$ függvényeket úgy, hogy $u(x)v(x) = f(x)g'(x)$ legyen. A továbbiakban látni fogjuk, hogy vannak „jó” és „rossz” választások! Nézzünk néhány feladatot:

6.1) $I = \int x \cdot \sin x dx$ esetén, ha $g'(x) = x$ lenne, akkor $g(x) = \frac{x^2}{2}$ és így a kapott $\int x^2 \sin x dx$ nem egyszerűbb hanem bonyolultabb mint az eredeti integrál, tehát ez rossz választás.

Legyen tehát $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$ és $g'(x) = \sin x \Rightarrow g(x) = -\cos x$ tehát $I = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C$.

6.2) $I = \int x \cdot \ln x dx$ esetén, ha megint $f(x) = x$ lenne, akkor $g'(x) = \ln x \Rightarrow g(x) = \int \ln x dx$

adódna, ami nem integrálható direkt. Tehát muszáj $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$ és

$g'(x) = x \Rightarrow g(x) = \frac{x^2}{2}$ tehát $I = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$.

6.3) $I = \int e^x \sin x dx$ esetén könnyen belátható, hogy bármelyik választás megfelelő. Legyen hát $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$ és $g'(x) = \sin x \Rightarrow g(x) = -\cos x$ tehát

$I = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx = -e^x \cos x + J$ (1). Könnyen belátható, hogy még egy parciális integrálás az eredeti I integrálhoz vezet, így I -ben egy egyenletet kapunk, ahonnan kiszámítható az I integrál. Ezúttal is legyen $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$ és $g'(x) = \cos x \Rightarrow g(x) = \sin x$ tehát $J = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = e^x \sin x - I$ (2).

Ha most a (2) összefüggést beírjuk az (1) összefüggésbe azt kapjuk, hogy $I = -e^x \cos x + e^x \sin x - I$ vagyis $2I = e^x (\sin x - \cos x) \Rightarrow I = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$.

6.4) Az $I_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n} dx$ esetén legyen $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^n} \Rightarrow f'(x) = -\frac{2nx}{(x^2+1)^{n+1}}$ és

$g'(x) = 1 \Rightarrow g(x) = x$ így hát felírható, hogy $I_n = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}} dx$ és mivel

$\frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}} = \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^{n+1}} = \frac{1}{(x^2+1)^n} - \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}$ ezért az $I_{n+1} = \frac{1}{2n} \frac{x}{(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n$

elsőrendű rekurziós összefüggés adódik $\forall n \in \mathbb{N}$, és $I_0 = x$.

Megjegyzés: A parciális integrálás egy azonnali alkalmazása a következő:

Ha $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bijektív, deriválható és deriválható inverzzel rendelkező függvény, akkor

$$\boxed{\int f^{-1}(x)dx = xf^{-1}(x) - F(f^{-1}(x))} \text{ ahol } F \text{ az } f \text{ függvény primitív függvénye!}$$

6.5) Számítsuk ki: $I = \int \arccos x dx$. Mivel $f^{-1}(x) = \arccos x$, $f(x) = \cos x$, $F(x) = \sin x$ az előző összefüggés alapján $I = x \arccos x - \sin(\arccos x) = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$.

A bemutatott összefüggés nagyon hatékony, ugyanis bármely inverz függvény integrálja kiszámítható ezzel!

A továbbiakban a változó csere (helyettesítés) módszeréről írunk.

7. Szorzatfüggvények integrálása I. változócsere módszerével:

Ebben az esetben egy $\boxed{\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + C}$ alakú integrállal találjuk szembe magunkat. Tehát az integrál alatt ezúttal is egy szorzatfüggvény van, azzal a sajátossággal, hogy a szorzat egyik tagja a másik tagnak (vagy annak egy részének) éppen a deriváltja. Ekkor a $g(x) = t \Rightarrow g'(x) dx = dt$ változócsereát eszközöljük.

Az előző helyzetnek sok sajátos esete is van, nézzünk ezek közül néhányat:

$$I = \int g(x) \cdot g'(x) dx = \int g(x) d(g(x)) = \frac{g^2(x)}{2} + C \text{ vagy } I = \int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \int \frac{d(g(x))}{g(x)} = \ln|g(x)| + C$$

vagy $I = \int g^n(x) g'(x) dx = \int g^n(x) d(g(x)) = \frac{g^{n+1}(x)}{n+1} + C$, stb. Nézzünk néhány példát is:

$$7.1) I = \int x(3x^2 + 1)^3 dx = \frac{1}{3} \int (3x^2 + 1)^3 d(3x^2 + 1) = \frac{1}{3} \frac{(3x^2 + 1)^4}{4} + C,$$

$$7.2) I = \int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = - \ln|\cos x| + C,$$

$$7.3) I = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} d(\sin x) = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} d(\sin x) = \int \frac{d(\sin x)}{\sin^2 x} - \int d(\sin x) = \\ = \frac{1}{\sin x} - \sin x + C$$

$$7.4) I = \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - \cos^4 x}} dx = 2 \int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1 - \cos^2 x} \sqrt{1 + \cos^2 x}} = 2 \int \frac{\cos x}{\sqrt{2 - \sin^2 x}} dx = 2 \int \frac{d(\sin x)}{\sqrt{2 - \sin^2 x}} = \\ = 2 \operatorname{arcsin} \frac{x}{\sqrt{2}} + C. \text{ Keressünk rekurziós összefüggést, a következő integrál esetén!}$$

$$7.5) I_n = \int \operatorname{tg}^n x dx = \int \operatorname{tg}^{n-2} x \cdot \operatorname{tg}^2 x dx = \int \operatorname{tg}^{n-2} x \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \operatorname{tg}^{n-2} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx - I_{n-2}. \text{ Tehát}$$

$$I_n = \int \operatorname{tg}^{n-2} x d(\operatorname{tg} x) - I_{n-2} \Leftrightarrow I_n = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2}, \forall n > 1 \text{ és } I_0 = x, I_1 = -\ln|x|.$$

8. A parciális integrálás és a változócsere kombinált módszere:

Ahogy a módszer neve is mutatja, együtt alkalmazzuk a parciális integrálást és a

változócsere is, persze valamilyen logikus sorrendben. Nézzünk a következő példát:

$$I = \int \frac{2x^2 + x}{\sqrt{1-x-x^2}} dx = -\int x \frac{(1-x-x^2)'}{\sqrt{1-x-x^2}} dx = -x\sqrt{1-x-x^2} + \int \sqrt{1-x-x^2} dx = -x\sqrt{1-x-x^2} + J$$

$$\text{Továbbá } J = \int \sqrt{1-x-x^2} dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{4-4x-4x^2} dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{(\sqrt{5})^2 - (2x+1)^2} dx \text{ . Így}$$

$$K = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \int x \frac{2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}} dx = a^2 \arcsin \frac{x}{a} - L$$

$$\text{és ez utóbbi integrált parciálisan számítjuk ki: } L = -\int x(\sqrt{a^2 - x^2})' dx =$$

$$= -x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = -x\sqrt{a^2 - x^2} + K \text{ ezért } 2L = a^2 \arcsin \frac{x}{a} - x\sqrt{a^2 - x^2} \text{ így már}$$

könnyűszerrel kiszámíthatjuk a J majd az I integrált.

9. Több módszer összetett alkalmazása:

Egy olyan példát mutatunk be, amikor a változócsere I. és II. módszerét is, valamint a számláló-nevező beszorzását meg a „teveszabályt” is alkalmazzuk. Ha $I = \int \frac{\sqrt{\sin x}}{\cos x} dx$ akkor legyen

$$\begin{aligned} \sin x = t^2 \Rightarrow \cos x dx = 2t dt \text{ így } I &= \int \frac{\cos x \sqrt{\sin x}}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\cos x \sqrt{\sin x}}{1 - \sin^2 x} dx = \\ &= -2 \int \frac{t^2 dt}{t^2 - 1} = -2 \int \frac{t^2 - 1 + 1}{t^2 - 1} dt = -2t - 2 \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| = -2 \sin x - 2 \ln \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} + C \end{aligned}$$

Végezetül megjegyezzük, hogy sehol sem írtuk ki az integrálok értelmezési tartományát, nem mintha ez nem lenne fontos, hanem azért, hogy takarékoskodjunk a helyvel. De ennek az elvégzését az érdeklődő Olvasó könnyűszerrel megteheti.

Befejezésül egy módszertani kérdésre szeretnénk kitérni. Több alkalommal több diákom is megkérdezte: honnan lehet látni, hogy mikor lehet (kell) parciálisan integrálni, és mikor változócserevel? Az alábbiakban erre fogunk válaszolni!

Ismételten megerősítjük, hogy *mind a két esetben egy* $\int u(x)v(x)dx$ alakú szorzat -függvény integrálásáról van szó!

- 1) Akkor használjuk a változócsere I. módszerét, ha a szorzat egyik tagja, *a másik tagnak vagy annak egy részének a deriváltja*, például: az $I = \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx$ esetén, $x = (x^2 + 1)'$ ezért a változócsere alkalmazzuk, $x^2 + 1 = t$ választással. Vagy $I = \int \cos x \cdot e^{\sin x} dx$ esetén $\cos x = (\sin x)'$ ezért a $\sin x = t$ változócsere alkalmazzuk.
- 2) Akkor használjuk a parciális integrálást, ha a szorzat két tagja közül *egyik sem deriváltja a másiknak, vagy annak egy részének*, például: $I = \int x \sin x dx$ vagy $I = \int e^x \sin x dx$, stb. Itt a szorzatot alkotó két függvénynek úgymond „semmi köze” egymáshoz.