Tippek, trükkök, ötletek határozott integrálok kiszámolásához

II. rész

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

Már a dolgozat elején megjegyezném, hogy a határozatlan integrálok számolásánál bemutatott összes módszer érvényes marad a határozott integrálok esetén is, hiszen ebben az esetben érvényes az $\int_a^b f(x)dx = F(a)-F(b)$ ú.n. Newton -Leibniz képlet (ahol F az f függvény primitív függvénye). A parciális integrálásnak is van határozott integrálokra vonatkozó képlete is, továbbá a változócsere is jól alkalmazható határozott integrálokra. Ez utóbbi esetben vagy kiszámoljuk a függvény primitív függvényét, és ezután alkalmazzuk a Newton-Leibniz képlete, vagy a változócsere során az integrál korlátait is megváltoztatjuk.

Ebben a dolgozatban inkább arra térünk ki, hogy mit is hoz újat a határozott integrálok számolása, viszonyítva a határozatlan integrálokhoz? Először is vegyük észre, hogy míg a határozatlan integrál egy függvény, addig a határozott integrál egy szám, méghozzá területet jelent. És éppen abból a különbségből adódik az, hogy egy határozott integrált úgy is ki lehet számolni, hogy *nem határozzuk meg a primitív függvényét!* A továbbiakban ilyen feladatokkal is találkozni fogunk!

Megjegyezzük, hogy ezúttal sem törekszünk teljességre semmilyen szempontból, csupán hasznos ötleteket gyűjtöttünk össze!

1. Integrálok számolása intervallumokon:

Ismert, hogy ha $c \in (a,b)$ akkor $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$. Ezt kiváltképpen akkor alkalmazzuk, amikor az f függvény abszolút értéket, egészrészt tartalmaz, vagy több képlettel van értelmezve. Nézzük is a példákat:

1.1) $I = \int_0^1 |2x-1| dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-2x) dx = \frac{1}{2}$

1.2) Ha $I = \int_0^n \frac{1}{2^{[x]}} dx, n \in \mathbb{N}$ akkor ismert, hogy $[x] = k \Leftrightarrow x \in [k, k+1)$ így felírható, hogy:

$$I = \int_0^1 \frac{1}{2^0} dx + \int_1^2 \frac{1}{2^1} dx + \int_2^3 \frac{1}{2^2} dx + ... + \int_{n-1}^n \frac{1}{2^{n-1}} dx = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

2. Páratlan függvények integrálja:

Ismert tulajdonság, hogy ha $f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ akkor $\int_{-a}^a f(x)dx = 0, \forall a \in \mathbb{R}$ esetén.

2.1) $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx$ esetén ha $f(x) = \ln \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$ akkor

$f(-x)=\ln\dfrac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}=\ln\left(\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\right)^{-1}=-\ln\left(\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\right)=-f(x)$ vagyis a függvény páratlan, ezért $I=0$.

2.2) $I=\int_1^3\dfrac{x-2}{x^2-4x+5}dx$ esetén ha $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-4x+5}$ akkor $f(x)=\dfrac{x-2}{(x-2)^2+1}$ így ha az integrálban az $y=x-2$ változócserét végezzük, akkor $I=\int_{-1}^{1}\dfrac{y}{y^2+1}dy$ adódik ahol $g(y)=\dfrac{y}{y^2+1}$ esetén $g(-y)=-g(y)$ ami azt jelenti, hogy $I=0$.

2.3) $I_n=\int_0^{\pi}\dfrac{\sin nx}{\sin x}dx$ esetén igazoljuk, hogy $I_{2n}=0,\forall n\in\mathbb{N}^*$ setén. Valóban, az $I_{2n}=\int_0^{\pi}\dfrac{\sin(2nx)}{\sin x}dx$ integrálban legyen $x=\dfrac{\pi}{2}+y\Rightarrow y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ és továbbá

$\dfrac{\sin(2nx)}{\sin x}=\dfrac{\sin(n\pi+2y)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+y\right)}=\dfrac{\sin(n\pi)\cos(2ny)+\cos(n\pi)\sin(2ny)}{\cos y}=(-1)^n\dfrac{\sin(2ny)}{\cos y}$ tehát

$I=(-1)^n\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin(2ny)}{\cos y}dy=0$ hiszen az integrandus alatti függvény páratlan.

3. Elsőfokú egyismeretlenes egyenlet segítségével kiszámítható integrálok:
Vannak olyan feladatok, ahol jól választott változócserével, többek között, visszakaphatjuk az kiszámítandó integrált, és ebből kifolyólag elsőfokú egyismeretlenes egyenlethez jutunk. Ez nagyon gyakran előfordul ha az integrál korlátok 0 és $\dfrac{\pi}{2}$ (de lehet más is) továbbá az integrandus alatt jelen van a $\sin x$ és $\cos x$ függvények, amelyekre tudjuk, hogy $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$ illetve $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$. Nézzünk egy azonnali alkalmazást:

3.1) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(\sin x+\cos x)dx$ esetén végezzük el az $x=\dfrac{\pi}{2}-y$ változócserét így azt kapjuk, hogy $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-y\right)(\sin y+\cos y)dy=\dfrac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin y+\cos y)dy-\int_0^{\frac{\pi}{2}}y(\sin y+\cos y)dx$ tehát azt kaptuk, hogy $I=\dfrac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)dx-I$ tehát $I=\dfrac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)dx=\dfrac{\pi}{2}$.

3.2) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin^2 x+\sin x}{1+\sin x+\cos x}dx$ esetén is végezzük el az $x=\dfrac{\pi}{2}-y$ változócserét így azt kapjuk, hogy $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 y+\cos y}{1+\sin y+\cos y}dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2 y+\cos y}{1+\sin y+\cos y}dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin y+\cos y-\sin^2 y-\sin y}{1+\sin y+\cos y}dy$

ahonnan azonnal adódik, hogy $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1dy-I$ vagyis $I=\frac{\pi}{4}$.

3.3) $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+tgx)dx$ esetén azt tartjuk szem előtt, hogy olyan változócserét végezzünk, hogy megmaradjunk a $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ intervallumban. Ezért hát legyen $x=\frac{\pi}{4}-t$ akkor azt kapjuk,

hogy $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left[1+tg\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right]dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\frac{1-tgt}{1+tgt}\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\frac{2}{1+tgt}dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln 2dt-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+tgt)dt$

Tehát azt kaptuk, hogy $I=\frac{\pi}{4}\ln 2-I$ ahonnan $I=\frac{\pi}{8}\ln 2$.

3.4) Számítsuk ki: $I=\int_0^1\frac{arctgx}{1+x}dx$. Legyen $x=\frac{1-t}{1+t}$ így $I=\int_0^1\frac{arctg\frac{1-t}{1+t}}{1+t}dt=$

$=\int_0^1\frac{arctg1-arctgt}{1+t}=\frac{\pi}{4}\int_0^1\frac{dt}{1+t}-I=\frac{\pi}{4}\ln 2-I\Rightarrow I=\frac{\pi}{8}\ln 2$.

4. Társintegrálok módszere:

Ezt a megoldási módszer a határozatlan integrálok esetén is bemutattuk. Itt is alkalmazható akár úgy, hogy nem használunk változócserét, de főképp úgy, hogy *változócserét használunk*.

4.1) $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$ esetén a társintegrál legyen $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$ így

$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}1dx=\frac{\pi}{4}$ és $I-J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\left(\sin x+\cos x\right)}{\sin x+\cos x}=\left[\ln(\sin x+\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\ln\sqrt{2}$

ahonnan $I=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}-\ln 2\right)$.

4.2) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$ esetén megoldhatnánk az előző módszerrel is, de itt kiaknázzuk azt a tényt, hogy határozott integrálról van szó, tehát elvégezzük az $x=\frac{\pi}{2}-y$ változócserét és ebből az

adódik, hogy $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx=J$ és $2I=I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\frac{\pi}{2}$

ami azt eredményezi, hogy $I=\frac{\pi}{4}$.

4.3) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x dx$ esetén a társintegrál legyen $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x dx$. Az $x=\frac{\pi}{2}-y$ változócserével azt kapjuk, hogy $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x dx=J$. Továbbá felírható, hogy $2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x\cos x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{\sin 2x}{2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin 2x dx-\frac{\pi}{2}\ln 2$. Ez utóbbi integrálban végezzük el a $2x=t$ változócserét, így $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin 2x d(2x)=\int_0^{\pi}\ln\sin t dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\ln\sin t dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t dx=2I$.

Tehát $2I=\frac{1}{2}\cdot 2I-\frac{\pi}{2}\ln 2\Leftrightarrow I=-\frac{\pi}{2}\ln 2$.

4.4) Ha $f:[0,b-a]\to[0,\infty)$ folytonos és $a<b$ akkor mennyi az $I=\int_a^b\frac{f(x-a)}{f(x-a)+f(b-x)}dx$ integrál? Ésszerűnek látszik, hogy a társintegrál $J=\int_a^b\frac{f(b-x)}{f(x-a)+f(b-x)}dx$ legyen, mert így $I+J=\int_a^b 1dx=b-a$. Továbbá az I -ben legyen $x-a=b-t$ így $I=\int_a^b\frac{f(b-t)}{f(b-t)+f(t-a)}dt=J$

Tehát $I=J=\frac{b-a}{2}$.

5. Sajátos, egyedi módszerek:

Számos olyan feladat adódhat, amelyekre nincsenek típusmódszerek, ezeket esetenként kell orvosolni. Nézzünk néhány ilyent feladatot is:

5.1) Ha $I=\int_{-x}^{x}\frac{e^t\cos t}{1+e^t}dt$, $\forall x\in\mathbb{R}$ esetén, akkor értelmezzük a következő függvényt $F(x)=\int_{-x}^{x}\frac{e^t\cos t}{1+e^t}dt$. Könnyen belátható, hogy $F'(x)=\frac{e^x\cos x}{1+e^x}+\frac{e^{-x}\cos(-x)}{1+e^{-x}}=\cos x$. Tehát $I=F(x)=\sin x+C$, $\forall x\in\mathbb{R}$ esetén.

5.2) Ha $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+x$ bijektív függvény, akkor az $I=\int_0^2 f^{-1}(t)dt$ integrál értéke mivel egyenlő? Mivel $f^{-1}(f(x))=x$, ezért végezzük el a $t=f(x)$ változócserét, és kapjuk, hogy $I=\int_0^1 xf'(x)dx=\int_0^1 x(3x^2+1)dx=\frac{5}{4}$.

5.3) Számítsuk ki: $I=\int_0^1\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$. Az $1-x$ és $1+x$ láttán könnyen eszünkbe juthatnak az $1-\cos t=2\sin^2\frac{t}{2}$ és $1+\cos t=2\cos^2\frac{t}{2}$ képletek. Ez arra ösztönözhet minket, hogy elvégezzük az $x=\cos t$ változócserét. Ekkor azt kapjuk, hogy $I=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\frac{t}{2}dt=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos t}{2}dt=\frac{1}{2}\left(\pi-2\right)$.

5.4) Számítsuk ki: $I=\int_{-2021}^{2021}\frac{x^{2022}}{1+2023^x}dx$. Legyen $x=-y$ így $I=\int_{-2021}^{2021}\frac{y^{2022}}{1+2023^{-y}}dy=$

$=\int_{-2021}^{2021}\frac{2023^y\cdot y^{2022}}{1+2023^y}dy$ ezért $2I=\int_{-2021}^{2021}x^{2022}\left(\frac{1}{1+2023^x}+\frac{2023^x}{1+2023^x}\right)dx=\int_{-2021}^{2021}x^{2022}dx=2021^{2022}$

6. Az $I=\int_a^b xf(x)dx$ alakú integrál, ahol f folytonos a $\left[a,b\right]$ intervallumon ha $f(a+b-x)=f(x)$, $\forall x\in\left[a,b\right]$.

Igazolni fogjuk, hogy $I=\int_a^b xf(x)dx=\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx=(a+b)\int_a^{\frac{a+b}{2}}f(x)dx$ **(*).** Először is végezzük el az $a+b-x=t$ változócserét, ekkor azt kapjuk, hogy $I=(a+b)\int_a^b f(x)dx-I$ vagyis $I=\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$. Továbbá $\int_a^b f(x)dx=\int_a^{\frac{a+b}{2}}f(x)dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx$ és a második integrálban újra elvégezzük az $a+b-x=t$ változócserét, és azt kapjuk, hogy $\int_a^b f(x)dx=2\int_a^{\frac{a+b}{2}}f(x)dx$ és ezzel igazoltuk a (*) egyenletsor utolsó egyenlőségét is.

A bemutatott (*) összefüggésnek nagyon sok további alkalmazása van, nézzünk néhányat:

6.1) $\int_0^{\pi}xg(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}g(\sin x)dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}g(\sin x)dx$ ahol $g(x)$ folytonos a $\left[0,1\right]$ intervallumon. Valóban ha a (*) egyenlőségekben $f(x)=g(\sin x)$, $a=\pi,b=0$ akkor mivel $\sin\left(\pi-x\right)=\sin x$ ezért $f(a+b-x)=f(x)$ teljesül.

6.1.1) Azonnali alkalmazás: $I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{3+\sin^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{3+\sin^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{d(\cos x)}{\cos^2 x-2^2}$ ahonnan

$I=\frac{\pi}{8}\left[\ln\frac{2-\cos x}{2+\cos x}\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{4}\ln 3$

6.2) $\int_0^{\pi}xg(\cos x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}g(\cos x)dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}g(\cos x)dx$ ahol $g(x)$ folytonos a $\left[-1,1\right]$ intervallumon és $g(-y)=g(y),\forall y\in\mathbb{R}$. Ugyancsak a (*) egyenlőségsort alkalmazzuk az $f(x)=g(\cos x)$ függvényre, de itt a $\cos\left(\pi-x\right)=-\cos x$ miatt az $f(a+b-x)=f(x)$ teljesüléséhez szükségünk van a g függvény párosságára.

6.2.1) Azonnali alkalmazás: $I=\int_0^{\pi} x\cos^2 x dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\cos^2 x dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{\pi^2}{4}$.

6.3) Ha f folytonos a $\left[-1,1\right]$ intervallumon, és $f(-x)=-f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$ akkor $I=\int_0^{2\pi} x^2 f(\sin x)dx=-4\pi^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$. Valóban, ha elvégezzük az $x=2\pi-y$ változócserét, akkor számolások után azt kapjuk, hogy $I=-4\pi\int_0^{\pi}(\pi-x)f(\sin x)dx$. Ha most elvégezzük az $x=\pi-y$ változócserét, akkor számolások után éppen a bizonyítandó eredményt kapjuk.

6.3.1) Alkalmazás: $I=\int_0^{2\pi} x^2\sin^3 x dx=-4\pi^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x dx=\ 4\pi^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos^2 x\right)d(\cos x)=\frac{8\pi^2}{3}$.

6.4) Ha f,g folytonos a $\left[-1,1\right]$ intervallumon és $g(-y)=g(y)\ \ \forall y\in\mathbb{R}$, akkor igaz, hogy $\int_0^{\pi} xf(\sin x)g(\cos x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)g(\cos x)dx$. Valóban, ha elvégezzük az $x=\pi-t$ változócserét, a $\sin(\pi-x)=\sin x,\cos(\pi-x)=-\cos x$ és $f(y)=y,g(y)=\frac{1}{1+y^2}$, $g(-y)=g(y)$ alapján éppen a bizonyítandó egyenlőséget kapjuk.

6.4.1) Alkalmazás: $I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx=-\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{d(\cos x)}{1+\cos^2 x}=-\frac{\pi}{2}arctg(\cos x)+C$

7. Inverz függvénnyel kapcsolatos integrál:

Igazolni fogjuk, hogy ha $f:\left[a,b\right]\to\left[c,d\right]$ szigorúan növekvő, szürjektív és folytonos függvény, akkor $\int_a^b f(x)dx+\int_c^d f^{-1}(y)dy=bd-ac$. Valóban, mivel f növekvő és szürjektív, ezért $f(a)=c,\ f(b)=d$. A második integrálban az $y=f(t)$ változócserét végezzük, és azt kapjuk, hogy $\int_c^d f^{-1}(y)dy=\int_a^b tf'(t)dt=\left[tf(t)\right]\Big|_a^b-\int_a^b f(x)dx=bc-ad-\int_a^b f(x)dx$.

7.1) Alkalmazás: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} arctg(\sin x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\arcsin(tgx)=\frac{\pi^2}{8}$. Mivel $f(x)=arctg(\sin x)$, és $f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ szigorúan növekvő, szürjektív és folytonos, ezért alkalmazható ez előző tulajdonság.

7.2) Ha $g(x)$ az $f(x)=x+e^x$ függvény inverze, akkor mennyi az $I=\int_1^{1+e} g(y)dy$ integrál?

A **7.** eredménye alapján $\int_0^1(x+e^x)dx+\int_1^{1+e} g(y)dy=1+e$, ahonnan $I=\frac{3}{2}$.

8. A Feynman trükk (Leibnitz szabály):

Ennek technikának lényegét feladatokon keresztül szemléltetjük. Kiszámítandó:

8.1) $I=\int\limits_0^1 \frac{x^a-x^b}{\ln x}dx$ ahol $a,b\in\mathbb{R}_+$ rögzített számok. A feladat megoldása céljából tekintsük az $I(s)=\int\limits_0^1 \frac{x^s-x^b}{\ln x}dx$ segédfüggvényt. Alkalmazzuk a Leibnitz szabályt, miszerint: $\frac{d}{ds}I(s)=\frac{d}{ds}\int\limits_0^1 \frac{x^s-x^b}{\ln x}dx=\int\limits_0^1 \frac{d}{ds}\frac{x^s-x^b}{\ln x}dx$ vagyis $I'(s)=\int\limits_0^1 \frac{x^s\ln x}{\ln x}dx=\int\limits_0^1 x^s dx=\frac{1}{s+1}$ tehát $I(s)=\ln|s+1|+C$. De vegyük észre, hogy $I(b)=0$ ezért $C=-\ln|b+1|$ vagyis $I(s)=\ln\left|\frac{s+1}{b+1}\right|$ tehát $I=I(a)=\ln\left|\frac{a+1}{b+1}\right|$.

8.2) Számítsuk ki: $I=\int\limits_0^1 (x\ln x)^3 dx$. A feladat megoldása céljából tekintsük az $I(s)=\int\limits_0^1 x^s dx$ segédfüggvényt. Alkalmazzuk a Leibnitz szabályt, miszerint: $I'(s)=\int\limits_0^1 \frac{d}{ds}\left(x^s\right)dx=\int\limits_0^1 x^s\ln x dx$ és tovább deriválva kapjuk, hogy $I''(s)=\int\limits_0^1 x^s\ln^2 x dx$ és végül $I'''(s)=\int\limits_0^1 x^s\ln^3 x dx$. Belátható, hogy $I=I'''(3)$. Másfelől $I(s)=\frac{1}{s+1}$ ahonnan $I'''(s)=\frac{3!}{(s+1)^4}$ így hát $I=I'''(3)=\frac{3!}{4^4}=\frac{3}{128}$

Megjegyzés: könnyen belátható, hogy az $I_\alpha=\int\limits_0^1 (x\ln x)^\alpha dx$ integrált is hasonlóan kiszámíthatjuk, $\forall\alpha\in\mathbb{R}_+$ rögzített szám esetén.

8.3) Számítsuk ki: $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{tgx}dx$. A segédfüggvény megválasztása nem mindig egyszerű dolog. Most éppen az $I(s)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{arctg(s\cdot tgx)}{tgx}dx$ segédfüggvény lesz jó. Ekkor $I'(s)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\left(s\cdot tgx\right)^2+1}dx=$ $=\frac{\pi}{2(s+1)}$. Tehát $I(s)=\frac{\pi}{2}\ln(s+1)+C$. De $I(0)=0\Rightarrow C=0$ és $I=I(1)=\frac{\pi}{2}\ln 2$.

Szakirodalom

[1] András Szilárd, Csapó Hajnalka, Lukács Andor: Matematika A XII. osztály számára, Státus Kiadó, Csíkszereda, 2002

[2] A Corduneanu és társai: Culegere de probleme de matematica pentru admiterea in invatamantul superior, Editura Junimea, 1972

[3] Farkas Miklós: Matematika, Tankönyv a XII. osztály számára, Ábel Kiadó

[4] Gh Siretchi: Calcul diferential si integral, Vol 2., Editura Stiintifica si Enciclopedica, Bucuresti, 1985

[5] Teste grila de matematica, Admitere 2008, U.T. Press, Cluj-Napoca, 2007

[6] https://www.cantorsparadise.com/richard-feynmans-integral-trick-e7afae85e25c