

Micimackó meséje XI-XII. osztályosoknak!

Elsőfokú lineáris egyenletrendszerek megoldása determinánsokkal



➤ Készítette: Tuzson Zoltán, tanár

Az egyenletrendszerek megoldása során 3 különböző esetet különböztetünk meg:

1) Az egyenletek száma = az ismeretlenek száma:



2) Az egyenletek száma < ismeretlenek száma:



3) Az egyenletek száma > ismeretlenek száma:



Szakkifejezések:

- Egy egyenletrendszer kompatibilis vagy összeférhető, ha megoldható, tehát van megoldása.
- Egy egyenletrendszer inkompatibilis, vagy összeférhetetlen, ha nincs megoldása
- Egy egyenletrendszer határozott, ha pontosan egy x, y, z megoldása van.
- Egy egyenletrendszer határozatlan, ha végtelen sok megoldása van (a megoldások függenek egy vagy több paramétertől)

1) Az egyenletek száma = az ismeretlenek száma



- Kiszámoljuk az egyenletrendszer D diszkriminánsát
- Amennyiben a rendszer D diszkriminánsa nem nulla, úgy az egyenlet rendszert Cramer egyenlet rendszernek hívjuk, és ennek a megoldása (három ismeretlen esetén):

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}, \quad z = \frac{D_z}{D}$$

- A D_x, D_y, D_z determinánsokat a D determinánsból kapunk úgy, hogy az illető ismeretlen együtthatóinak az oszlopát a szabad tagok oszlopával helyettesítjük.

(lásd a feladatoknál!)

1. feladat:

▶ Oldjuk meg Cramer szabállyal a következő egyenletrendszert:

▶ A rendszer diszkriminánsa:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

$$\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}$$

▶ Az ismeretlenekhez tartozó determinánsok:

$$D_x = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 30 \quad D_y = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 12 \quad D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 6$$

▶ Tehát $x = \frac{D_x}{D} = 5$, $y = \frac{D_y}{D} = 2$, $z = \frac{D_z}{D} = 1$

▶ A Cramer egyenletrendszer MINDIG kompatibilis és határozott!

▶ De csak akkor Cramer rendszer, ha $D \neq 0$

2. feladat:

➤ Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ -2x - 2y - 4z = 8 \end{cases}$$

➤ A rendszer diszkriminánsa: $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 0!$

➤ Mivel a determináns 0, ezért szükséges EBBŐL egy 2x2-es ú.n. FŐDETERMINÁNST választani, ami NEM NULLA!

$$D_{f\ddot{o}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

➤ Lett egy MELLÉKEGYENLET (a harmadik) így lesz egy ú.n. KARAKTERISZTIKUS determináns, amit a fődeterminánsból kapunk, szegélyezéssel:

$$D_{kar} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \\ -2 & -2 & 8 \end{vmatrix} = -18 \neq 0$$

➤ Ha a karakterisztikus determináns NEM NULLA, akkor Rouché tétele értelmében, az egyenlet rendszer inkompatibilis, vagyis nincs megoldása.

3. feladat:

➤ Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ -2x - 2y - 4z = 4 \end{cases}$$

➤ A rendszer diszkriminánsa: $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 0!$

➤ Mivel a determináns 0, ezért szükséges EBBŐL egy 2x2-es ú.n. FŐDETERMINÁNST választani, ami NEM NULLA!

$$D_{f\ddot{o}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

➤ Lett egy MELLÉKEGYENLET (a harmadik) így lesz egy ú.n. KARAKTERISZTIKUS determináns, amit a fődeterminánsból kapunk, szegélyezéssel:

$$D_{kar} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \\ -2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

➤ Ha a karakterisztikus determináns NULLA, akkor Rouché tétele értelmében, az egyenlet rendszer kompatibilis, és így folytatjuk: $z=m$, ekkor

folytatás:

- ▶ Beírjuk a $z=m$ értéket az egyenletekbe, és átvisszük a tulsó oldalra:

$$\begin{cases} x + y = -2m - 1 \\ 2x - y = -2m - 4 \\ 4x + y = -4m - 2 \end{cases}$$

- ▶ Ebből csak az első 2 egyenletből álló rendszert oldjuk meg, Cramer szabállyal:

$$\begin{cases} 1x + 1y = -2m - 1 \\ 2x - 1y = -4m - 2 \end{cases} \quad D = D_{fő} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

- ▶ A D éppen a D fő, és kiszámoljuk: $D_x = \begin{vmatrix} -2m-1 & 1 \\ -4m-2 & -1 \end{vmatrix} = 6m-1$ $D_y = \begin{vmatrix} 1 & -2m-1 \\ 2 & -4m-2 \end{vmatrix} = 0$

- ▶ Ezért, a Cramer szabály szerint:

$$x = \frac{D_x}{D} = -\frac{6m-1}{3}, \quad y = \frac{D_y}{D} = 0, \quad z = m, \quad m \in \mathbb{R}$$

- ▶ Mivel az m paraméter bármilyen értéket felvehet, ezért az egyenletrendszer kompatibilis és határozatlan (meg lehet oldani, de végtelen sok megoldása van).

2) Az egyenletek száma < ismeretlenek száma:



- ▶ Baloldalon csak annyi ismeretlent tartunk meg, hogy UGYANANNYI legyen az ismeretlenek száma, mint az egyenletek száma.
- ▶ A többi ismeretlent rendre ÁTNEVEZZÜK m, n, p, \dots értékekre, és ÁTVISSZÜK a tulsó oldalra.
- ▶ Megoldjuk az így kapott egyenletrendszert, az m, n, p, \dots függvényében. Tehát a rendszerünk határozatlan lesz!

4. feladat:

- ▶ Oldjuk meg, a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} -x + y + 2z = -1 \\ 2x - 3y + z = 3 \end{cases}$$

- ▶ Muszáj egy ismeretlent a jobboldalra vinni, legyen tehát $z=m$, és így az egyenlet rendszer:

$$\begin{cases} -x + y = -2m - 1 \\ 2x - 3y = -m + 3 \end{cases}$$

- ▶ Az új egyenletrendszer determinánsa $D = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ és mivel nem nulla, ezért Cramer egyenletrendszer.

- ▶ Kiszámoljuk: $D_x = \begin{vmatrix} -2m-1 & 1 \\ -m+3 & -3 \end{vmatrix} = 7m$ és $D_y = \begin{vmatrix} -1 & -2m-1 \\ 2 & -m+3 \end{vmatrix} = 5m-1$

- ▶ A Cramer szabály szerint: $x = \frac{D_x}{D} = 7m$, $y = \frac{D_y}{D} = 5m-1$, $z = m$, $m \in \mathbb{R}$

- ▶ Tehát az egyenletrendszer kompatibilis és határozatlan!

3) Az egyenletek száma > ismeretlenek száma:

- Ebben az esetben kiválasztunk csak annyi egyenletet, amennyi ismeretlenünk van (ennek a determinánsa ne legyen nulla). Ezek a főegyenletek.
- A többi egyenletet ú.n. mellékegyenletnek nevezzük.
- Megoldjuk a főegyenletekből álló rendszert.
- Ezután annyi karakterisztikus determinánst képezünk szegélyezéssel, amennyi mellékegyenletünk van.
- Rouché tétele: Az egyenletrendszer csak akkor kompatibilis, ha az összes karakterisztikus determináns nulla. Ellenkező esetben inkompatibilis, tehát nem kell megoldani.
- Ha kompatibilis, akkor Cramer szabállyal megoldjuk a főegyenletekből álló rendszert!

5. feladat:

- Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} 3x + y = -1 \\ -x + y = 2 \\ x - 2y = -1 \\ 2x - 2y = -4 \end{cases}$$

- Tartsuk meg az első két egyenletet: $\begin{cases} 3x + y = -1 \\ -x + y = 2 \end{cases} (*)$, $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$
- Továbbá 2 mellékegyenletünk van, ezért 2 karakterisztikus determináns lesz:

$$D_{kar1} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 9 \quad D_{kar2} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

- De mivel az egyik karakterisztikus determináns nem nulla, ezért Rouché tétele értelmében, az egyenlet rendszer inkompatibilis (nincs megoldása= nem oldható meg)

6. feladat:

- ▶ Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} 3x + y = -1 \\ -x + y = 2 \\ -6x - 2y = 2 \\ 2x - 2y = -4 \end{cases}$$

- ▶ Tartsuk meg az első két egyenletet: $\begin{cases} 3x + y = -1 \\ -x + y = 2 \end{cases} (*)$, $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$

- ▶ Továbbá 2 mellékegyenletünk van, ezért 2 karakterisztikus determináns lesz:

$$D_{kar1} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -6 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad D_{kar2} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

- ▶ Mivel mind a két karakterisztikus determináns 0, ezért a rendszer kompatibilis, így Cramer szabállyal megoldjuk a (*) egyenlet rendszert:

$$D_x = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad D_y = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \Rightarrow x = \frac{D_x}{D} = -\frac{3}{4}, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{5}{4}$$

Paraméteres egyenletrendszerek tárgyalása

- ▶ Leghamarabb az egyenletrendszernek egy determinánst írunk fel.
- ▶ Kiszámítjuk, majd megkeressük, hogy milyen paraméter értékre nem nulla.
- ▶ Amikor $D \neq 0$, akkor Cramer szabállyal megoldjuk az egyenletrendszert, mint előbbieken.
- ▶ Megkeressük azon paraméter értékeket, amelyekre $D = 0$
- ▶ Ezeket a paraméter értékeket rendre visszahelyettesítjük az egyenletekbe.
- ▶ Az újonnan kapott egyenletek esetén nyilván $D = 0$
- ▶ Tehát fődeterminánst kell választanunk, és úgy járunk el, mint az előbbieken

7. feladat:

- ▶ Az m paraméter függvényében tárgyaljuk, és oldjuk meg, a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} mx + y - z = 1 \\ x + my - z = 1 \\ -x + y + mz = 1 \end{cases}$$

- ▶ A rendszer determinánsa: $D = \begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & m & -1 \\ -1 & 1 & m \end{vmatrix} = m(m-1)(1+m)$

- ▶ Mivel $D = 0 \Leftrightarrow m(1-m)(1+m) = 0$ ezért azt kapjuk, hogy $m \in \{-1, 0, 1\}$

- ▶ I.) Ha $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ akkor $D \neq 0$ tehát Cramer egyenletrendszer, így

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & m & -1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = (m+1)(m-1) \quad D_y = \begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & m \end{vmatrix} = (m+1)(m-1) \quad D_z = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (m-1)(m+1)$$

folytatás:

- Így hát Cramer szabály alapján: $x = \frac{D_x}{D} = \frac{1}{m}$, $y = \frac{D_y}{D} = \frac{1}{m}$, $z = \frac{1}{m}$
- II.) Ha $m=0$, akkor az egyenlet rendszer így alakul:

$$\begin{cases} 0x + y - z = 1 \\ x + 0y - z = 1 \\ -x + y + 0z = 1 \end{cases}$$

- Meg kell válasszunk egy fődeterminánst: $D_{fő} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$
- A karakterisztikus determináns: $D_{kar} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ ezért a Rouché tétele
- szerint, az egyenlet rendszer inkompatibilis. (Ugyanerre a következtetésre jutunk akkor is, ha a 3 egyenletet összeadjuk, és $0=3$ adódik).
- III.) Ha $m=1$, akkor az egyenlet rendszer így alakul:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + y - z = 1 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$$

- Észrevehető, hogy két egyenlet egyforma, ezért az egyiket elhagyjuk, így

folytatás:

- Az egyenletrendszer a következő:
$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$$
- Most $z=k$, és átvisszük a másik oldalra, ekkor azt kapjuk, hogy
$$\begin{cases} x + y = k + 1 \\ -x + y = -k + 1 \end{cases}$$
- A rendszer determinánsa $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$
- Most megoldjuk a Cramer szabály szerint:
$$D_x = \begin{vmatrix} k+1 & 1 \\ -k+1 & 1 \end{vmatrix} = 2k \quad D_y = \begin{vmatrix} 1 & k+1 \\ -1 & -k+1 \end{vmatrix} = 2 \quad x = \frac{D_x}{D} = k, \quad y = \frac{D_y}{D} = 1, \quad z = k, \quad k \in \mathbb{R}$$
- IV.) Ha $m=-1$, akkor az egyenlet rendszer így alakul:
$$\begin{cases} -x + y - z = 1 \\ x - y - z = 1 \\ -x + y - z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y - z = 1 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$$
- Meg kell válasszunk egy fődeterminánst:
$$D_{fő} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$
- Most $x=k$, és átvisszük a másik oldalra, ekkor azt kapjuk, hogy
$$\begin{cases} y - z = k + 1 \\ -y - z = -k + 1 \end{cases}$$
- Kiszámoljuk $D_y = \begin{vmatrix} k+1 & -1 \\ -k+1 & -1 \end{vmatrix} = -2k \quad D_z = \begin{vmatrix} 1 & k+1 \\ -1 & -k+1 \end{vmatrix} = 2$
- Tehát a Cramer szabály szerint $y = \frac{D_y}{D} = k, \quad z = \frac{D_z}{D} = -1, \quad x = k, \quad k \in \mathbb{R}$

Összefoglalás:

- ▶ I) Ha $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ akkor az egyenletrendszer kompatibilis, határozott és

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{1}{m}, y = \frac{D_y}{D} = \frac{1}{m}, z = \frac{1}{m}$$

- ▶ II) Ha $m = 0$ akkor az egyenletrendszer inkompatibilis.

- ▶ III) Ha $m = 1$ akkor az egyenletrendszer kompatibilis és határozatlan, és

$$x = \frac{D_x}{D} = k, y = \frac{D_y}{D} = 1, z = k, k \in \mathbb{R}$$

- ▶ IV) Ha $m = -1$ akkor az egyenletrendszer kompatibilis és határozatlan, és

$$y = \frac{D_y}{D} = k, z = \frac{D_z}{D} = -1, x = k, k \in \mathbb{R}$$

A homogén egyenlet rendszerek

- ▶ Három ismeretlen esetén, az alakjuk a következő:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases}$$

- ▶ Könnyen látható, hogy $x = y = z = 0$ mindig megoldása az egyenletnek. Ezt a megoldást banális, vagy triviális megoldásnak hívják.

- ▶ Az egyenlet rendszer diszkriminánsa:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

- ▶ Könnyen látható, hogy $D_x = D_y = D_z = 0$ mivel 1-1 oszlop csupa 0.
- ▶ Tehát a homogén egyenletrendszernek csak akkor van a banálistól különböző megoldása, ha $D = 0$ és ekkor egy fődeterminánst kell választanunk, és ugyanúgy járunk el, mint az előbbieken.

8. feladat:

- ▶ Oldjuk meg, a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} -x - y + 2z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$$

- ▶ Az egyenletrendszer determinánsa $D = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$

- ▶ Választunk egy fődeterminánst: $D_{fő} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$

- ▶ Legyen $z=m$, ekkor az egyenlet rendszer így alakul: $\begin{cases} -x - y = -2m \\ -x + 2y = m \end{cases} (*)$

- ▶ Ekkor A karakterisztikus determináns: $D_{kar} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

- ▶ Jegyezd meg: **A homogén egyenletrendszer karakterisztikus determinánsa mindig 0.**

- ▶ Tehát a Rouché tétel szerint, az egyenletrendszer kompatibilis, így a Cramer szabállyal megoldjuk a (*) egyenletrendszert:

$$D_x = \begin{vmatrix} -2m & -1 \\ m & 2 \end{vmatrix} = -3m, \quad D_y = \begin{vmatrix} -1 & -2m \\ -1 & m \end{vmatrix} = -3m \Rightarrow x = \frac{D_x}{D} = m, \quad y = m, \quad z = m, \quad m \in \mathbb{R}$$



Gyakorló feladatok I.



Oldjuk meg a következő Cramer egyenletrendszereket:

1)

$$a) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y - z = 3 \\ 4x + y + z = 9 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + 3y + z = 11 \\ 3x + 4y - z = 8 \end{cases} \quad c) \begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = -2 \\ x + y - z = 4 \end{cases} \quad d) \begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ -2x + y + 3z = -7 \\ x + 2y - 2z = 7 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ y + 2z = 8 \\ -x + 2y + z = 6 \end{cases} \quad f) \begin{cases} x + 4y + 3z = 1 \\ 2x + 5y + 4z = 4 \\ x - 3y - 2z = 5 \end{cases} \quad g) \begin{cases} 2x - y + 3z = 3 \\ 4x - y - 2z = -2 \\ x + 2y - 2z = 1 \end{cases} \quad h) \begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ 3x + y - 2z = -1 \\ 2x - 3y + z = 10 \end{cases}$$

$$i) \begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 4 \\ x + z = -4 \end{cases} \quad j) \begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ x + y - 2z = 0 \\ 3x - 2y - z = 1 \end{cases} \quad k) \begin{cases} x - y + z = 3 \\ -x + y + z = -1 \\ x + y - z = -1 \end{cases} \quad l) \begin{cases} 2x + 3y - z = -3 \\ -x - y + z = 3 \\ x + z = 0 \end{cases}$$



Gyakorló feladatok II.



Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket:

2)

$$a) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y - z = 3 \\ 4x + 2y - 2z = 5 \end{cases} \quad b) \begin{cases} -6x - 8y + 2z = -16 \\ 2x + 3y + z = 11 \\ 3x + 4y - z = 8 \end{cases} \quad c) \begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = -2 \\ 4x - 2y - 2z = 3 \end{cases} \quad d) \begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ -2x + y + 3z = -7 \\ 2x - y - 3z = 7 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} 2x - 4y - 2z = -12 \\ y + 2z = 8 \\ -x + 2y + z = 6 \end{cases} \quad f) \begin{cases} -3x + 9y + 6z = -15 \\ 2x + 5y + 4z = 4 \\ x - 3y - 2z = 5 \end{cases} \quad g) \begin{cases} 2x + 4y - 4z = 3 \\ 4x - y - 2z = -2 \\ x + 2y - 2z = 1 \end{cases} \quad h) \begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ -4x + 6y - 2z = -20 \\ 2x - 3y + z = 10 \end{cases}$$

$$i) \begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 4 \\ 2x + 2y = -4 \end{cases} \quad j) \begin{cases} 6x - 4y - 2z = 2 \\ x + y - 2z = 0 \\ 3x - 2y - z = 1 \end{cases} \quad k) \begin{cases} x - y + z = 3 \\ -x + y + z = -1 \\ 2x - 2y - 2z = -3 \end{cases} \quad l) \begin{cases} 2x + 2y - 2z = -6 \\ -x - y + z = 3 \\ x + z = 0 \end{cases}$$



Gyakorló feladatok III.



Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket:

3)

$$a) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 2x + 3y + z = 11 \\ 3x + 4y - z = 8 \end{cases} \quad c) \begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = -2 \end{cases} \quad d) \begin{cases} -2x + y + 3z = -7 \\ x + 2y - 2z = 7 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} y + 2z = 8 \\ -x + 2y + z = 6 \end{cases} \quad f) \begin{cases} x + 4y + 3z = 1 \\ x - 3y - 2z = 5 \end{cases} \quad g) \begin{cases} 2x - y + 3z = 3 \\ x + 2y - 2z = 1 \end{cases} \quad h) \begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ 2x - 3y + z = 10 \end{cases}$$

$$i) \begin{cases} y + z = 4 \\ x + z = -4 \end{cases} \quad j) \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2x - 3y + z = 1 \end{cases} \quad k) \begin{cases} x - y + z = 3 \\ x + y - z = -1 \end{cases} \quad l) \begin{cases} 2x + 3y - z = -3 \\ -x - y + z = 3 \end{cases}$$



Gyakorló feladatok IV.



Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket:

4)

$$\begin{array}{l} a) \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ 2x + y - z = 3 \\ 4x + y + z = 9 \\ -4x - 2y + 2z = 5 \end{array} \right. \quad b) \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ 2x + 3y + z = 11 \\ 3x + 4y - z = 8 \\ -6x - 8y - 2z = -16 \end{array} \right. \quad c) \left\{ \begin{array}{l} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = -2 \\ x + y - z = 4 \\ 4x - 2y - 2z = 2 \end{array} \right. \quad d) \left\{ \begin{array}{l} 3x - y + z = 0 \\ -2x + y + 3z = -7 \\ x + 2y - 2z = 7 \\ 4x - 2y - 6z = 14 \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} e) \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 14 \\ y + 2z = 8 \\ -x + 2y + z = 6 \\ 2x - 4y - 2z = -12 \end{array} \right. \quad f) \left\{ \begin{array}{l} x + 4y + 3z = 1 \\ 2x + 5y + 4z = 4 \\ x - 3y - 2z = 5 \\ -2x - 8y - 6z = -3 \end{array} \right. \quad g) \left\{ \begin{array}{l} 2x - y + 3z = 3 \\ 4x - y - 2z = -2 \\ x + 2y - 2z = 1 \\ -2x - 4y + 4z = -2 \end{array} \right. \quad h) \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y + z = 4 \\ 3x + y - 2z = -1 \\ 2x - 3y + z = 10 \\ -6x - 2y + 4z = 3 \end{array} \right. \end{array}$$



Gyakorló feladatok V.



Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket:

5)

$$a) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ 4x + 2y - 2z = 0 \end{cases} \quad b) \begin{cases} -6x - 8y + 2z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ 3x + 4y - z = 0 \end{cases} \quad c) \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 4x - 2y - 2z = 0 \end{cases} \quad d) \begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ -2x + y + 3z = 0 \\ 2x - y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} 2x - 4y - 2z = -12 \\ y + 2z = 8 \\ -x + 2y + z = 6 \end{cases} \quad f) \begin{cases} -3x + 9y + 6z = 0 \\ 2x + 5y + 4z = 0 \\ x - 3y - 2z = 0 \end{cases} \quad g) \begin{cases} 2x + 4y - 4z = 0 \\ 4x - y - 2z = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \end{cases} \quad h) \begin{cases} 2x + 3y + z = 0 \\ -4x + 6y - 2z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \end{cases}$$

$$i) \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} \quad j) \begin{cases} 6x - 4y - 2z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \\ 3x - 2y - z = 0 \end{cases} \quad k) \begin{cases} x - y + z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ 2x - 2y - 2z = 0 \end{cases} \quad l) \begin{cases} 2x + 2y - 2z = 0 \\ -x - y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$



Gyakorló feladatok VI.



Tárgyaljuk, és oldjuk meg a következő paraméteres egyenletrendszereket:

$$6) \quad \begin{array}{l} a) \begin{cases} mx + y + z = 1 \\ 2x + y - z = 3 \\ 4x + my + z = 9 \end{cases} \\ b) \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + my + z = 11 \\ mx + 4y - z = 8 \end{cases} \\ c) \begin{cases} -2x + my + z = m \\ x - 2y + z = -2 \\ x + my - z = 4 \end{cases} \\ d) \begin{cases} mx - y + z = 0 \\ -2x + y + mz = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \end{cases} \end{array}$$

$$e) \begin{cases} x + my + 3z = 14 \\ y + mz = 8 \\ -x + 2y + z = 6 \end{cases} \quad f) \begin{cases} x + 4y + mz = 1 \\ 2x + 5y + 4z = 4 \\ x - my - 2z = 5 \end{cases} \quad g) \begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ 4x - y - 2z = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \end{cases} \quad h) \begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ 3x + y - mz = -1 \\ mx - 3y + z = 10 \end{cases}$$

$$i) \begin{cases} mx + y = 2 \\ y + mz = 4 \\ x + z = -4 \end{cases} \quad j) \begin{cases} 2x - my + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \\ mx - 2y - z = 0 \end{cases} \quad k) \begin{cases} mx - y + z = 3 \\ -x + y + z = -1 \\ x + my - z = -m \end{cases} \quad l) \begin{cases} 2x + 3y - z = -3 \\ -x - y + mz = 3 \\ x + mz = 0 \end{cases}$$

Megoldottam!



Köszönöm a figyelmet!

