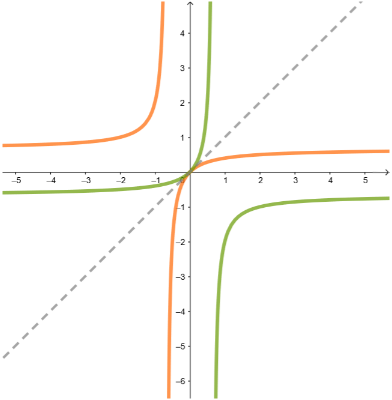
Függvények tulajdonságai

Nagy Örs
matematikatanár

Báthory István Elméleti Líceum
Kolozsvár

Alapfogalmak

- értelmezési tartomány
- értékkészlet, képhalmaz
- grafikon, grafikus kép
- tengelymetszet, zérushely
- előjel, paritás, periodicitás
- korlátosság, szélsőérték
- monotonitás, konvexitás
- injektivitás, szürjektivitás
- bijektivitás, invertálhatóság



1. Határozd meg az $f : D \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x} + \lg \frac{x+1}{2-x}$ függvény maximális értelmezési tartományát!

1. Határozd meg az $f : D \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x} + \lg \frac{x+1}{2-x}$ függvény maximális értelmezési tartományát!

Kifejezés	Létezési feltétel
$\frac{P(x)}{Q(x)}$	$Q(x) \neq 0$
$\sqrt[2k]{E(x)}$	$E(x) \geq 0$
$\log_a E(x)$	$E(x) > 0,$ $a > 0, a \neq 1$
$\arcsin E(x)$	$-1 \leq E(X) \leq 1$
$\arccos E(x)$	$-1 \leq E(x) \leq 1$
$\operatorname{tg} E(x)$	$E(x) \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{ctg} E(x)$	$E(x) \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

1. Határozd meg az $f : D \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x} + \lg \frac{x+1}{2-x}$ függvény maximális értelmezési tartományát!

Kifejezés	Létezési feltétel
$\frac{P(x)}{Q(x)}$	$Q(x) \neq 0$
$\sqrt[2k]{E(x)}$	$E(x) \geq 0$
$\log_a E(x)$	$E(x) > 0,$ $a > 0, a \neq 1$
$\arcsin E(x)$	$-1 \leq E(X) \leq 1$
$\arccos E(x)$	$-1 \leq E(x) \leq 1$
$\operatorname{tg} E(x)$	$E(x) \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{ctg} E(x)$	$E(x) \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

L.f.: $\begin{cases} x \geq 0 \\ \frac{x+1}{2-x} > 0 \\ 2 - x \neq 0 \end{cases}$

1. Határozd meg az $f : D \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x} + \lg \frac{x+1}{2-x}$ függvény maximális értelmezési tartományát!

Kifejezés	Létezési feltétel
$\frac{P(x)}{Q(x)}$	$Q(x) \neq 0$
$\sqrt[2k]{E(x)}$	$E(x) \geq 0$
$\log_a E(x)$	$E(x) > 0,$ $a > 0, a \neq 1$
$\arcsin E(x)$	$-1 \leq E(X) \leq 1$
$\arccos E(x)$	$-1 \leq E(x) \leq 1$
$\operatorname{tg} E(x)$	$E(x) \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{ctg} E(x)$	$E(x) \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

L.f.: $\begin{cases} x \geq 0 \\ \frac{x+1}{2-x} > 0 \\ 2 - x \neq 0 \end{cases}$

x		-1		2	
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$2-x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
Tört	$-$	0	$+$	/	$-$

1. Határozd meg az $f: D \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x} + \lg \frac{x+1}{2-x}$ függvény maximális értelmezési tartományát!

Kifejezés	Létezési feltétel
$\frac{P(x)}{Q(x)}$	$Q(x) \neq 0$
$\sqrt[2k]{E(x)}$	$E(x) \geq 0$
$\log_a E(x)$	$E(x) > 0,$ $a > 0, a \neq 1$
$\arcsin E(x)$	$-1 \leq E(X) \leq 1$
$\arccos E(x)$	$-1 \leq E(x) \leq 1$
$\operatorname{tg} E(x)$	$E(x) \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{ctg} E(x)$	$E(x) \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

L.f.: $\begin{cases} x \geq 0 \\ \frac{x+1}{2-x} > 0 \\ 2 - x \neq 0 \end{cases}$

x		-1		2	
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$2-x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
Tört	$-$	0	$+$	/	$-$

Tehát $D = [0; 2)$.

2. Határozd meg az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ függvény képét!

2. Határozd meg az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$ függvény képét!

Az $f:A\to B$ függvény képe: $\operatorname{Im} f=\{f(x)|x\in A\}\subseteq B$

2. Határozd meg az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ függvény képét!

Az $f : A \to B$ függvény képe: $\operatorname{Im} f = \{f(x) | x \in A\} \subseteq B$

I. megoldás: Legyen $y \in \mathbb{R}$, és
keressük azokat az $x \in \mathbb{R}$,
amelyekre $f(x) = y$, azaz

$$\frac{2x}{x^2+1} = y \Leftrightarrow yx^2 - 2x + y = 0$$

Ha $y = 0$, akkor $x = 0$, kül.

$$\Delta = 4 - 4y^2 \geq 0 \Leftrightarrow y \in [-1; 1].$$

Tehát $\operatorname{Im} f = [-1; 1]$.

2. Határozd meg az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ függvény képét!

Az $f : A \to B$ függvény képe: $\operatorname{Im} f = \{f(x) | x \in A\} \subseteq B$

I. megoldás: Legyen $y \in \mathbb{R}$, és keressük azokat az $x \in \mathbb{R}$, amelyekre $f(x) = y$, azaz

$$\frac{2x}{x^2+1} = y \Leftrightarrow yx^2 - 2x + y = 0$$

Ha $y = 0$, akkor $x = 0$, kül.

$$\Delta = 4 - 4y^2 \geq 0 \Leftrightarrow y \in [-1; 1].$$

Tehát $\operatorname{Im} f = [-1; 1]$.

II. megoldás: f folyt. $\mathbb{R}$-en, $f(1) = 1, f(-1) = -1$, és

$$-1 \leq \frac{2x}{x^2+1} \leq 1, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$-x^2 - 1 \leq 2x \leq x^2 + 1$$

$$-x^2 - 2x - 1 \leq 0 \leq x^2 - 2x + 1$$

$$-(x+1)^2 \leq 0 \leq (x-1)^2, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Tehát $\operatorname{Im} f = [-1; 1]$.

2. Határozd meg az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ függvény képét!

Az $f : A \to B$ függvény képe: $\operatorname{Im} f = \{f(x) | x \in A\} \subseteq B$

III. megoldás: f folytonos és deriválható $\mathbb{R}$-en, és

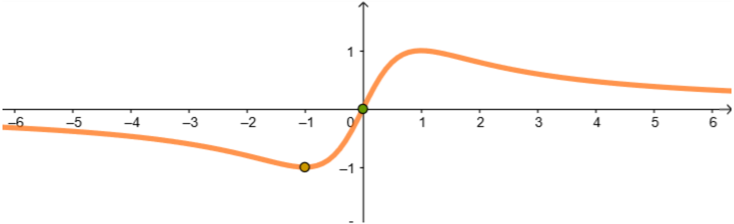
$$f'(x) = -\frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1; 1\}.$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Tehát $\operatorname{Im} f = [-1; 1]$.

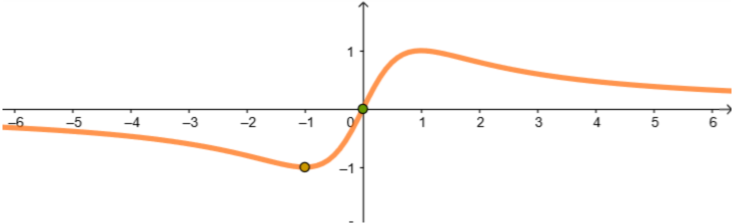
Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$ függvény egyéb tulajdonságai.

- Az $f : A \to B$ függvény grafikonja: $G_f = \{(x; f(x)) | x \in A\} \subseteq A \times B$
- Grafikus kép: a G_f pontjainak ábrázolásával kapott görbe



Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$ függvény egyéb tulajdonságai.

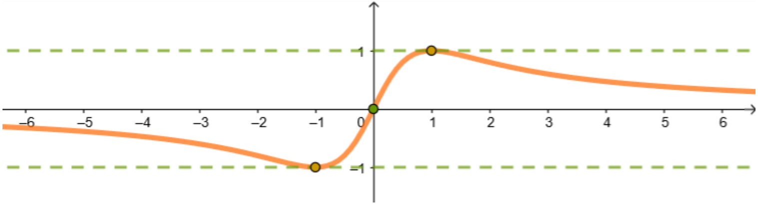
- Az $f:A\to B$ függvény grafikonja: $G_f=\{(x;f(x))|x\in A\}\subseteq A\times B$
- Grafikus kép: a G_f pontjainak ábrázolásával kapott görbe



- $P(x_P;y_P)\in G_f \iff f(x_P)=y_P$. Itt pl. $f(-1)=-1$
- Az $x_0\in A$ zérushelye az $f:A\to B$ fggv-nek, ha $f(x_0)=0$. Itt $x_0=0$
- $G_f\cap O_x=\{(x_i;0)\}$, $G_f\cap O_y=\{(0;f(0))\}$. Itt a $(0;0)$.
- f előjele $=f(x)$ előjele. Itt $f<0$ a $(-\infty,0)$-on és $f>0$ a $(0,+\infty)$-on

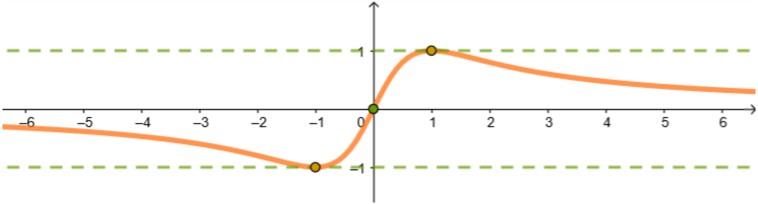
Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$ függvény további tulajdonságai.

- Az $f: A\to B$ függvény korlátos, ha $\exists\, k, K\in\mathbb{R}: k\le f(x)\le K, \forall x\in A$.
  Itt pl. $k=-2$ vagy $\forall k\le -1$, és pl. $K=5$ vagy $\forall K\ge 1$
  Megj.: f korlátos függvény $\iff$ $\operatorname{Im} f$ korlátos halmaz



Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$ függvény további tulajdonságai.

- Az $f:A\to B$ függvény korlátos, ha $\exists\, k,K\in\mathbb{R}: k\le f(x)\le K, \forall x\in A$.
  Itt pl. $k=-2$ vagy $\forall k\le -1$, és pl. $K=5$ vagy $\forall K\ge 1$
  Megj.: f korlátos függvény $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{Im} f$ korlátos halmaz



- Szélsőértékek:
  · Az $m\in\operatorname{Im} f$ (globális) minimuma az $f:A\to B$ függvénynek, ha $m\le f(x), \forall x\in A$. Itt $m=-1$.
  · Az $M\in\operatorname{Im} f$ (globális) maximuma az $f:A\to B$ függvénynek, ha $M\ge f(x), \forall x\in A$. Itt $M=1$.

3. Tanulmányozd az $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x}{x-1}$ fggv. monotonitását!

3. Tanulmányozd az $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x-1}$ fggv. monotonitását!

$f : A \to B$ növekvő A-n $\Leftrightarrow \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \geq 0, \forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$

$f : A \to B$ csökkenő A-n $\Leftrightarrow \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \leq 0, \forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$

3. Tanulmányozd az $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x-1}$ fggv. monotonitását!

$f : A \to B$ növekvő A-n $\Leftrightarrow \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \geq 0, \forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$
$f : A \to B$ csökkenő A-n $\Leftrightarrow \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \leq 0, \forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$

Legyen $x_1, x_2 \in (1, +\infty), x_1 \neq x_2$.

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{x_2 - x_1}{(x_1 - x_2)(x_1 - 1)(x_2 - 1)} = \frac{-1}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)}$$

Mivel $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$, ezért $(x_1 - 1)(x_2 - 1) > 0$, így $\frac{-1}{(x_1-1)(x_2-1)} < 0$, tehát f szigorúan csökkenő az $(1, +\infty)$-on.

3. Tanulmányozd az $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x-1}$ fggv. monotonitását!

$f : A \to B$ növekvő A-n $\Leftrightarrow \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \geq 0, \forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$
$f : A \to B$ csökkenő A-n $\Leftrightarrow \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \leq 0, \forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$

Legyen $x_1, x_2 \in (1, +\infty), x_1 \neq x_2$.

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{x_2 - x_1}{(x_1 - x_2)(x_1 - 1)(x_2 - 1)} = \frac{-1}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)}$$

Mivel $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$, ezért $(x_1 - 1)(x_2 - 1) > 0$, így $\frac{-1}{(x_1-1)(x_2-1)} < 0$, tehát f szigorúan csökkenő az $(1, +\infty)$-on.

Megj.: A monotonitás a függvény elsőrendű deriváltja segítségével is vizsgálható.
$f : A \to B$ csökkenő A-n $\Leftrightarrow f'(x) \leq 0, \forall x \in A$
Valóban, $f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} < 0, \ \forall x > 1$, tehát f szig. csökkenő az $(1, \infty)$-on.

4. **Tekintsük az $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ halmazt.**

   a) **Hány $f : A \to A$ páros függvény van?**

   b) **Hány $f : A \to A$ páratlan függvény van?**

4. Tekintsük az $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ halmazt.

a) Hány $f : A \to A$ páros függvény van?

b) Hány $f : A \to A$ páratlan függvény van?

$f : A \to B$ páros, ha $f(-x) = f(x), \forall -x, x \in A$.

$f : A \to B$ páratlan, ha $f(-x) = -f(x), \forall -x, x \in A$.

- A origószimmetrikus halmaz: $\forall x \in A \Leftrightarrow -x \in A$
- páros függvény grafikus képe szimmetrikus az O_y-ra
- páratlan függvény grafikus képe origószimmetrikus

4. Tekintsük az $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ halmazt.
a) Hány $f : A \to A$ páros függvény van?
b) Hány $f : A \to A$ páratlan függvény van?

$f : A \to B$ páros, ha $f(-x) = f(x), \forall -x, x \in A$.
$f : A \to B$ páratlan, ha $f(-x) = -f(x), \forall -x, x \in A$.
- A origószimmetrikus halmaz: $\forall x \in A \Leftrightarrow -x \in A$
- páros függvény grafikus képe szimmetrikus az O_y-ra
- páratlan függvény grafikus képe origószimmetrikus

a) f pontosan akkor páros, ha $f(-2) = f(2), f(-1) = f(1), f(0) \in A$. Ezeknek egymástól függetlenül 5-5-5 különböző értékük lehet, így összesen $5^3 = 125$ ilyen függvény van.

4. Tekintsük az $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ halmazt.

a) Hány $f : A \to A$ páros függvény van?

b) Hány $f : A \to A$ páratlan függvény van?

$f : A \to B$ páros, ha $f(-x) = f(x), \forall -x, x \in A$.
$f : A \to B$ páratlan, ha $f(-x) = -f(x), \forall -x, x \in A$.
- A origószimmetrikus halmaz: $\forall x \in A \Leftrightarrow -x \in A$
- páros függvény grafikus képe szimmetrikus az O_y-ra
- páratlan függvény grafikus képe origószimmetrikus

a) f pontosan akkor páros, ha $f(-2) = f(2), f(-1) = f(1), f(0) \in A$. Ezeknek egymástól függetlenül 5-5-5 különböző értékük lehet, így összesen $5^3 = 125$ ilyen függvény van.

b) f pontosan akkor páratlan, ha $f(-2) = -f(2), f(-1) = -f(1) \in A$ és $f(0) = 0$, amelyeknek egymástól függetlenül 5-5-1 különböző értékük lehet, így összesen $5^2 = 25$ ilyen függvény van.

5. Határozd meg az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\left\{\frac{x}{2}\right\}+\left\{\frac{x}{3}\right\}$ fggv. egy periódusát!

5. Határozd meg az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \left\{\frac{x}{2}\right\} + \left\{\frac{x}{3}\right\}$ fggv. egy periódusát!

$f : A \to B$ periodikus, ha $\exists\ T > 0 : f(x+T) = f(x), \forall x, x+T \in A.$

5. Határozd meg az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\left\{\frac{x}{2}\right\}+\left\{\frac{x}{3}\right\}$ fggv. egy periódusát!

$$f:A\to B \text{ periodikus, ha } \exists\, T>0: f(x+T)=f(x), \forall x, x+T\in A.$$

Mivel $[2,3]=6$, ezért $f(x+6)=f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, így a $T=6$ periódusa f-nek.

$$f(x+6)=\left\{\frac{x+6}{2}\right\}+\left\{\frac{x+6}{3}\right\}=\left\{\frac{x}{2}+3\right\}+\left\{\frac{x}{3}+2\right\}=\left\{\frac{x}{2}\right\}+\left\{\frac{x}{3}\right\}=f(x).$$

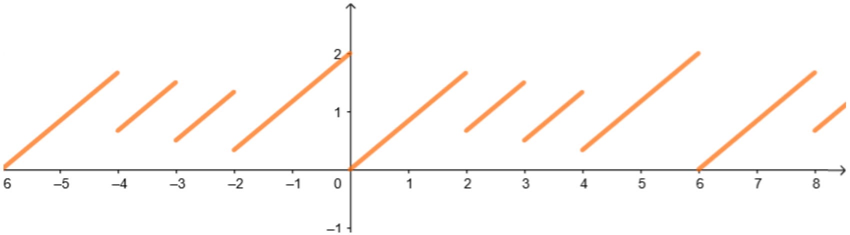
5. Határozd meg az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\left\{\frac{x}{2}\right\}+\left\{\frac{x}{3}\right\}$ fggv. egy periódusát!

$$f:A\to B \text{ periodikus, ha } \exists\, T>0: f(x+T)=f(x), \forall x, x+T\in A.$$

Mivel $[2,3]=6$, ezért $f(x+6)=f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, így a $T=6$ periódusa f-nek.

$$f(x+6)=\left\{\frac{x+6}{2}\right\}+\left\{\frac{x+6}{3}\right\}=\left\{\frac{x}{2}+3\right\}+\left\{\frac{x}{3}+2\right\}=\left\{\frac{x}{2}\right\}+\left\{\frac{x}{3}\right\}=f(x).$$

Megj.: $T=6$ egyben főperiódus, és $\forall\ 6n\in\mathbb{N}^*$ szám periódus.



6. Tekintsük az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 2 \\ 2x+a, & x > 2 \end{cases}$ **függvényt.**

Határozd meg az $a \in \mathbb{R}$ **értékét úgy, hogy az** f **függvény**

a) injektív **b) szürjektív** **c) bijektív legyen.**

6. Tekintsük az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 2\\ 2x+a, & x>2\end{cases}$ függvényt.

Határozd meg az $a\in\mathbb{R}$ értékét úgy, hogy az f függvény

a) injektív b) szürjektív c) bijektív legyen.

$$f:A\to B \text{ injektív} \iff [\forall x_1,x_2\in A, f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2.]$$

- Geom. jel.: $\forall$ az O_x-el $||$ egyenes legfeljebb egyszer metszi a graf. képet
- Többágú függvény esetén: $\mathrm{Im}\, f_1\cap \mathrm{Im}\, f_2\cap \ldots \cap \mathrm{Im}\, f_n=\emptyset$

Megj.: 1. f szigorúan monoton $\Longrightarrow$ f injektív

2. f páros vagy periodikus $\Longrightarrow$ f NEM injektív

6. Tekintsük az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 2\\ 2x+a, & x>2\end{cases}$ függvényt.

Határozd meg az $a\in\mathbb{R}$ értékét úgy, hogy az f függvény

a) injektív b) szürjektív c) bijektív legyen.

$$f: A\to B \text{ injektív} \iff [\forall x_1, x_2\in A, f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2.]$$

- Geom. jel.: $\forall$ az O_x-el $||$ egyenes legfeljebb egyszer metszi a graf. képet
- Többágú függvény esetén: $\mathrm{Im}\, f_1\cap \mathrm{Im}\, f_2\cap \ldots \cap \mathrm{Im}\, f_n=\emptyset$

  Megj.: 1. f szigorúan monoton $\Longrightarrow$ f injektív

  2. f páros vagy periodikus $\Longrightarrow$ f NEM injektív

$$x\le 2\Longrightarrow x+1\le 3\Longrightarrow \mathrm{Im}\, f_1=(-\infty,3].$$

$$x>2\Longrightarrow 2x>4\Longrightarrow 2x+a>4+a\Longrightarrow \mathrm{Im}\, f_2=(a+4,\infty).$$

$$f \text{ injektív}\iff \mathrm{Im}\, f_1\cap \mathrm{Im}\, f_2=\emptyset$$

$$(-\infty,3]\cap(a+4,\infty)=\emptyset\iff a+4\ge 3\iff a\ge -1.$$

6. Tekintsük az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 2 \\ 2x+a, & x > 2 \end{cases}$ függvényt.

Határozd meg az $a \in \mathbb{R}$ értékét úgy, hogy az f függvény

a) injektív **b) szürjektív** **c) bijektív legyen.**

6. Tekintsük az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 2 \\ 2x+a, & x > 2 \end{cases}$ függvényt.

Határozd meg az $a \in \mathbb{R}$ értékét úgy, hogy az f függvény

a) injektív b) szürjektív c) bijektív legyen.

$$f : A \to B \text{ szürjektív} \Leftrightarrow [\forall y \in B,\ \exists x \in A : f(x) = y] \Leftrightarrow \operatorname{Im} f = B.$$

- Geom. jel.: $\forall$ az O_x-el $||$ egyenes legalább egyszer metszi a graf. képet
- Többágú függvény esetén: $\operatorname{Im} f_1 \cup \operatorname{Im} f_2 \cup \ldots \cup \operatorname{Im} f_n = B$

  Megj.: Ha $\exists y \in B : f(x) \neq y,\ \forall x \in A$, akkor f NEM szürjektív.

6. Tekintsük az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 2 \\ 2x+a, & x>2 \end{cases}$ függvényt.
Határozd meg az $a\in\mathbb{R}$ értékét úgy, hogy az f függvény
a) injektív b) szürjektív c) bijektív legyen.

$$f:A\to B \text{ szürjektív} \Leftrightarrow [\forall y\in B,\ \exists x\in A: f(x)=y] \Leftrightarrow \operatorname{Im} f=B.$$

- Geom. jel.: $\forall$ az O_x-el $||$ egyenes legalább egyszer metszi a graf. képet
- Többágú függvény esetén: $\operatorname{Im} f_1\cup \operatorname{Im} f_2\cup \ldots \cup \operatorname{Im} f_n=B$

  Megj.: Ha $\exists y\in B: f(x)\neq y,\ \forall x\in A$, akkor f NEM szürjektív.

$$x\le 2 \Longrightarrow x+1\le 3 \Longrightarrow \operatorname{Im} f_1=(-\infty,3].$$

$$x>2 \Longrightarrow 2x>4 \Longrightarrow 2x+a>4+a \Longrightarrow \operatorname{Im} f_2=(a+4,\infty).$$

$$f \text{ szürjektív} \Longleftrightarrow \operatorname{Im} f_1\cup \operatorname{Im} f_2=B$$

$$(-\infty,3]\cup(a+4,\infty)=\mathbb{R} \Longleftrightarrow a+4\le 3 \Longleftrightarrow a\le -1.$$

6. Tekintsük az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 2 \\ 2x+a, & x > 2 \end{cases}$ függvényt.

Határozd meg az $a \in \mathbb{R}$ értékét úgy, hogy az f függvény

a) injektív b) szürjektív c) bijektív legyen.

6. Tekintsük az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 2 \\ 2x+a, & x > 2 \end{cases}$ függvényt.

Határozd meg az $a \in \mathbb{R}$ értékét úgy, hogy az f függvény

a) injektív b) szürjektív c) bijektív legyen.

$$f : A \to B \text{ bijektív} \iff f \text{ injektív ÉS szürjektív}$$

- Geom. jel.: $\forall$ az O_x-el $||$ egyenes pontosan egyszer metszi a graf. képet
- f nem injektív VAGY nem szürjektív $\implies$ f NEM bijektív

6. Tekintsük az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 2 \\ 2x+a, & x>2 \end{cases}$ függvényt.

Határozd meg az $a\in\mathbb{R}$ értékét úgy, hogy az f függvény

a) injektív b) szürjektív c) bijektív legyen.

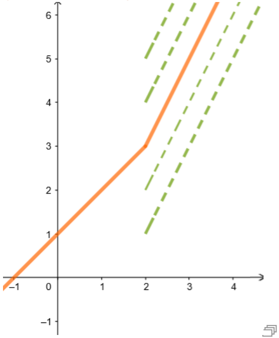
$$f: A\to B \text{ bijektív} \iff f \text{ injektív ÉS szürjektív}$$

- Geom. jel.: $\forall$ az O_x-el $||$ egyenes pontosan egyszer metszi a graf. képet
- f nem injektív VAGY nem szürjektív $\Longrightarrow$ f NEM bijektív

$$f \text{ bijektív} \iff \begin{cases} f \text{ inj.} \\ f \text{ szürj.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{Im}\, f_1 \cap \mathrm{Im}\, f_2 = \emptyset \\ \mathrm{Im}\, f_1 \cup \mathrm{Im}\, f_2 = \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \ge -1 \\ a \le -1 \end{cases} \Leftrightarrow a=-1.$$



7. Igazold, hogy az $f : \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\} \to \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}, f(x) = \frac{2x}{3x+2}$ függvény invertálható, majd határozd meg az inverzét!

7. Igazold, hogy az $f:\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{2}{3}\right\}\to\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{2}{3}\right\}, f(x)=\frac{2x}{3x+2}$ függvény invertálható, majd határozd meg az inverzét!

$$f:A\to B \text{ invertálható} \iff f \text{ bijektív} \iff f \text{ inj. ÉS szürj.}$$

7. Igazold, hogy az $f : \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\} \to \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}, f(x) = \frac{2x}{3x+2}$ függvény invertálható, majd határozd meg az inverzét!

$$f : A \to B \text{ invertálható} \iff f \text{ bijektív} \iff f \text{ inj. ÉS szürj.}$$

Inj.: Legyen $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\}$. $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{2x_1}{3x_1+2} = \frac{2x_2}{3x_2+2}$
$\Leftrightarrow 6x_1x_2 + 4x_1 = 6x_1x_2 + 4x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f$ inj. (1)

7. Igazold, hogy az $f : \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\} \to \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}, f(x) = \frac{2x}{3x+2}$ függvény invertálható, majd határozd meg az inverzét!

$$f : A \to B \text{ invertálható} \iff f \text{ bijektív} \iff f \text{ inj. ÉS szürj.}$$

Inj.: Legyen $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\}$. $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{2x_1}{3x_1+2} = \frac{2x_2}{3x_2+2}$
$\Leftrightarrow 6x_1x_2 + 4x_1 = 6x_1x_2 + 4x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f$ inj. (1)

Szürj.: Ig. h. $\forall y \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{3}\}$, $\exists x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\} : f(x) = y$.
$\frac{2x}{3x+2} = y \Leftrightarrow 2x = 3xy + 2y \Leftrightarrow x(3y-2) = -2y \Leftrightarrow$
$x = -\frac{2y}{3y-2} \neq -\frac{2}{3}, (0 \neq -4) \Rightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\} \Rightarrow f$ szürj. (2)

7. Igazold, hogy az $f:\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{2}{3}\right\}\to\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{2}{3}\right\}, f(x)=\frac{2x}{3x+2}$ függvény invertálható, majd határozd meg az inverzét!

$$f: A\to B \text{ invertálható} \Longleftrightarrow f \text{ bijektív} \Longleftrightarrow f \text{ inj. ÉS szürj.}$$

Inj.: Legyen $x_1, x_2\in\mathbb{R}\setminus\{-\frac{2}{3}\}$. $f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow \frac{2x_1}{3x_1+2}=\frac{2x_2}{3x_2+2}$
$\Leftrightarrow 6x_1x_2+4x_1=6x_1x_2+4x_2\Leftrightarrow x_1=x_2\Rightarrow f$ inj. (1)

Szürj.: Ig. h. $\forall y\in\mathbb{R}\setminus\{\frac{2}{3}\},\ \exists x\in\mathbb{R}\setminus\{-\frac{2}{3}\}: f(x)=y$.
$\frac{2x}{3x+2}=y\Leftrightarrow 2x=3xy+2y\Leftrightarrow x(3y-2)=-2y\Leftrightarrow$
$x=-\frac{2y}{3y-2}\neq-\frac{2}{3}, (0\neq-4)\Rightarrow x\in\mathbb{R}\setminus\{-\frac{2}{3}\}\Rightarrow f$ szürj. (2)

(1), (2) $\Rightarrow f$ bijektív $\Rightarrow f$ invertálható

$$f^{-1}:\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{2}{3}\right\}\to\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{2}{3}\right\}, f^{-1}(x)=-\frac{2x}{3x-2}.$$

Megj.: $f\circ f^{-1}=f^{-1}\circ f=\mathbb{1}_x$, és graf. képeik szimm. az $y=x$-re

További feladatok

1. Határozd meg az $f : D \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x-1} + \log_2(2 - x - x^2)$ függvény maximális értelmezési tartományát!
2. Tanulmányozd az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |2x + 1| - 1$ függvény korlátosságát, majd határozd meg szélsőértékeit!
3. Tanulmányozd az $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}, f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$ függvény paritását!
4. Határozd meg az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \{x\} + \{\frac{x}{2}\}$ függvény egy periódusát!
5. Igazold, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + x + 1$ függvény nem injektív és nem is szürjektív!
6. Igazold, hogy az alábbi fggvk. invertálhatók, és határozd meg inverzüket!
   a) $f : [1, \infty) \to [2, \infty), f(x) = x + \frac{1}{x}$
   b) $f : (0, \infty) \to (1, \infty), f(x) = x^2 + 1$
   c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x^3 + 1$