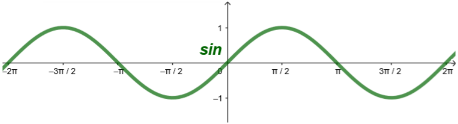
# Inverz trigonometrikus függvények és trigonometrikus egyenletek

Nagy Örs
matematikatanár

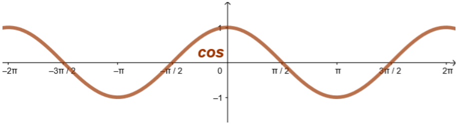
Báthory István Elméleti Líceum
Kolozsvár

# A trigonometrikus függvények tulajdonságai

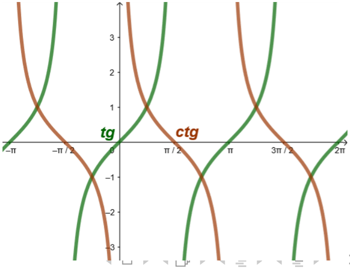
- $f : \mathbb{R} \to [-1,1], f(x) = \sin x$
  - periodikus: $\sin(x + 2k\pi) = \sin x, \forall x \in \mathbb{R}$
  - páratlan: $\sin(-x) = -\sin x, \forall x \in \mathbb{R}$
  - korlátos, $\operatorname{Im} f = [-1,1]$, szürj., de NEM inj.




- $f : \mathbb{R} \to [-1,1], f(x) = \cos x$
  - periodikus: $\cos(x + 2k\pi) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$
  - páros: $\cos(-x) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$
  - korlátos, $\operatorname{Im} f = [-1,1]$, szürj., de NEM inj.

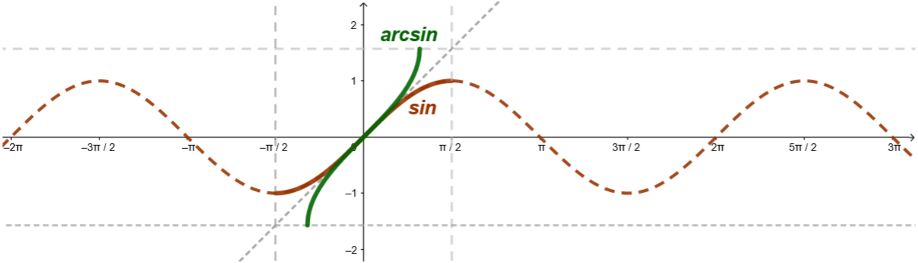



- $f : \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{tg} x$
  - per.: $\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\right\}$
  - ptl.: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\right\}$
  - nem korlátos, $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$, szürj., de NEM inj.
- $f : \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{ctg} x$
  - period.: $\operatorname{ctg}(x + k\pi) = \operatorname{ctg} x, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$
  - páratlan: $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$



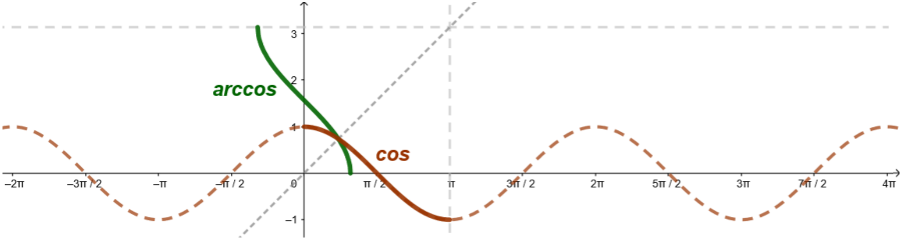
## $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1], f(x) = \sin x$

- szig. növekvő: $-\frac{\pi}{2} \le x < y \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -1 \le \sin x < \sin y \le 1$
- bijektív, invertálható és inverz függvénye:
  $f^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], f^{-1}(x) = \arcsin x$
  · szig. növekvő; korlátos, $\exists$ min., $\exists$ Max.
  · páratlan: $\arcsin(-x) = -\arcsin x, \forall x \in [-1, 1]$
  · bijektív: $\arcsin(\sin x) = x, \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(\arcsin x) = x, \forall x \in [-1, 1]$



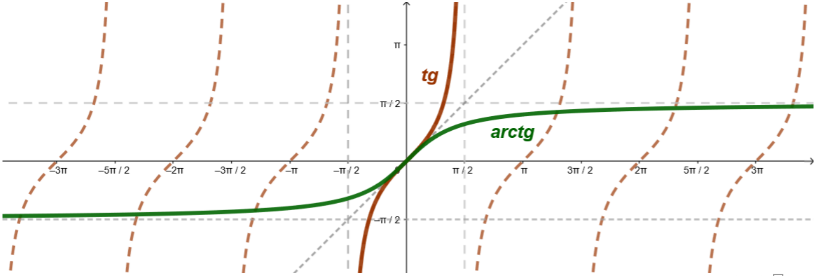
## $f : [0, \pi] \to [-1, 1], f(x) = \cos x$

- szig. csökkenő: $0 \leq x < y \leq \pi \Leftrightarrow 1 \geq \cos x > \cos y \geq -1$
- bijektív, invertálható és inverz függvénye:
  $f^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi], f^{-1}(x) = \arccos x$
  · szig. csökkenő; korlátos, $\exists$ min., $\exists$ Max.
  · paritása nincs; $\arccos(-x) = \pi - \arccos x, \forall x \in [-1, 1]$
  · bijektív: $\arccos(\cos x) = x, \forall x \in [0, \pi]$, $\cos(\arccos x) = x, \forall x \in [-1, 1]$



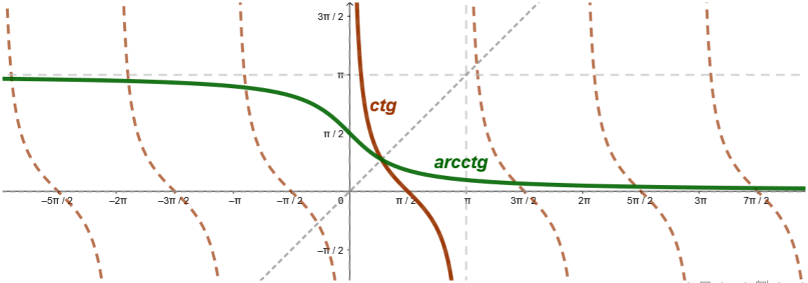
## $f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R},\ f(x)=\operatorname{tg} x$

- szig. növekvő: $x<y \Leftrightarrow \operatorname{tg} x<\operatorname{tg} y$
- bijektív, invertálható és inverz függvénye:
  $f^{-1}:\mathbb{R}\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\ f^{-1}(x)=\operatorname{arctg} x$
  · szig. növekvő; korlátos, DE $\nexists$ min., $\nexists$ Max.
  · páratlan: $\operatorname{arctg}(-x)=-\operatorname{arctg} x, \forall x\in\mathbb{R}$
  · bijektív: $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)=x, \forall x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)=x, \forall x\in\mathbb{R}$



## $f : (0, \pi) \to \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{ctg} x$

- szig. csökkenő: $x < y \Leftrightarrow \operatorname{ctg} x > \operatorname{ctg} y$
- bijektív, invertálható és inverz függvénye:
  $f^{-1} : \mathbb{R} \to (0, \pi), f^{-1}(x) = \operatorname{arcctg} x$
  · szig. csökkenő; korlátos, DE $\nexists$ min., $\nexists$ Max.
  · paritása nincs; $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x, \forall x \in \mathbb{R}$
  · bijektív: $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x, \forall x \in (0, \pi)$, $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$



# Inverz trigonometrikus függvények tulajdonságai

**1. Határozd meg az $f : D \to [0, \pi], f(x) = \arcsin x + \arccos(1 - x)$ fggv. maximális értelmezési tartományát!**

$$\begin{cases} x \in [-1, 1] \\ 1 - x \in [-1, 1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-1, 1] \\ x \in [0, 2] \end{cases} \Rightarrow x \in [0, 1] \Rightarrow D = [0, 1].$$

# Inverz trigonometrikus függvények tulajdonságai

**1. Határozd meg az $f : D \to [0, \pi], f(x) = \arcsin x + \arccos(1-x)$ fggv. maximális értelmezési tartományát!**

$$\begin{cases} x \in [-1,1] \\ 1-x \in [-1,1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-1,1] \\ x \in [0,2] \end{cases} \Rightarrow x \in [0,1] \Rightarrow D = [0,1].$$

**2. Számítsd ki $\operatorname{tg}\left(\arccos(-1) + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ értékét!**

$$\operatorname{tg}\left(\arccos(-1) + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \operatorname{tg}\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1.$$

# Inverz trigonometrikus függvények tulajdonságai

**1. Határozd meg az $f : D \to [0,\pi],\ f(x) = \arcsin x + \arccos(1-x)$ fggv. maximális értelmezési tartományát!**

$$\begin{cases} x \in [-1,1] \\ 1-x \in [-1,1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-1,1] \\ x \in [0,2] \end{cases} \Rightarrow x \in [0,1] \Rightarrow D = [0,1].$$

**2. Számítsd ki $\operatorname{tg}\left(\arccos(-1) + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ értékét!**

$$\operatorname{tg}\left(\arccos(-1) + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \operatorname{tg}\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1.$$

**3. Számítsd ki $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg}\frac{1}{2}\right)$ értékét!**

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg}\frac{1}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\operatorname{arcctg}\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arcctg}\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

**4. Határozd meg $x \in [-1, 1]$ értékét, ha $\arcsin x + \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2}$.**

$$\arcsin x + \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \arcsin x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$\arcsin x = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \sin \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow M = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}.$$

**4. Határozd meg $x \in [-1,1]$ értékét, ha $\arcsin x + \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2}$.**

$$\arcsin x + \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \arcsin x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$\arcsin x = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \sin \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow M = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}.$$

**5. Oldd meg az $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{2}$ egyenletet!**

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{3} \,\Big|\, \operatorname{tg}() \Leftrightarrow$$

$$x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{3}\right) = \operatorname{ctg}\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{3}\right)} = 3.$$

**6. Számítsd ki** $\sin\left(2\arccos\frac{4}{5}\right)$ **értékét!**

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x, \quad \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}, \forall x \in [-1,1].$$

$$\sin\left(2\arccos\frac{4}{5}\right) = 2\sin\left(\arccos\frac{4}{5}\right)\cdot\cos\left(\arccos\frac{4}{5}\right) =$$
$$= 2\cdot\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}\cdot\frac{4}{5} = 2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5} = \frac{24}{25}$$

**6. Számítsd ki** $\sin\left(2\arccos\frac{4}{5}\right)$ **értékét!**

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x, \quad \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}, \forall x \in [-1,1].$$

$$\sin\left(2\arccos\tfrac{4}{5}\right) = 2\sin\left(\arccos\tfrac{4}{5}\right)\cdot\cos\left(\arccos\tfrac{4}{5}\right) =$$
$$= 2\cdot\sqrt{1-\left(\tfrac{4}{5}\right)^2}\cdot\tfrac{4}{5} = 2\cdot\tfrac{3}{5}\cdot\tfrac{4}{5} = \tfrac{24}{25}$$

**7. Számítsd ki** $\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{12}{13}\right)$ **értékét!**

$$\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}, \quad \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}, \forall x \in [-1,1].$$

$$\cos\left(\tfrac{1}{2}\arcsin\tfrac{12}{13}\right) = \sqrt{\tfrac{1+\cos\left(\arcsin\frac{12}{13}\right)}{2}} = \sqrt{\tfrac{1+\frac{5}{13}}{2}} = \sqrt{\tfrac{9}{13}} = \tfrac{3}{\sqrt{13}}.$$

$$\cos\left(\arcsin\tfrac{12}{13}\right) = \sqrt{1-\left(\tfrac{12}{13}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{25}{169}} = \tfrac{5}{13}.$$

**1. Oldd meg a $\sin 2x = \frac{1}{2}$ egyenletet a $(0, 2\pi)$ intervallumon!**

$$\sin x = a \in [-1, 1] \Leftrightarrow x = \arcsin a + 2k\pi \ \vee \ x = \pi - \arcsin a + 2k\pi$$
$$\sin u(x) = \sin v(x) \Leftrightarrow u(x) = v(x) + 2k\pi \ \vee \ u(x) = \pi - v(x) + 2k\pi$$

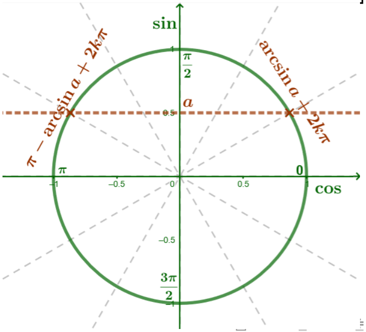
$$\sin 2x = \frac{1}{2} \iff \left[2x = \arcsin\frac{1}{2} + 2k\pi \ \vee \ 2x = \pi - \arcsin\frac{1}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right]$$

$$2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \vee \ 2x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{12} + k\pi \ \vee \ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

DE $x \in (0, 2\pi)$, ezért

$$M = \left\{\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}\right\}.$$



**2. Határozd meg az $x \in (0,4)$ értékét, ha $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.**

$$\cos x = a \in [-1,1] \iff x = \pm \arccos a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$
$$\cos u(x) = \cos v(x) \iff u(x) = \pm v(x) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

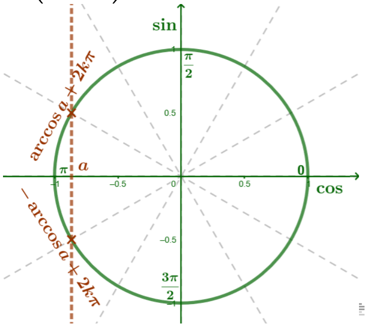
$$\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \iff x+\frac{\pi}{6} = \pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$x+\frac{\pi}{6} = \pm\left(\pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2k\pi$$

$$x+\frac{\pi}{6} = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\left[x = -\pi + 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$$

$$\text{DE} \quad x \in (0,4), \text{ így } M = \left\{\frac{2\pi}{3}, \pi\right\}.$$



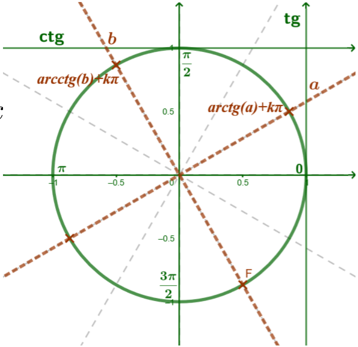
**3. Határozd meg a $\operatorname{tg}\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ egyenletnek a $(0,\pi)$-ben levő megoldásait!**

$$\operatorname{tg} x = a \in \mathbb{R} \iff x = \operatorname{arctg} a + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$
$$\operatorname{tg} u(x) = \operatorname{tg} v(x) \iff u(x) = v(x) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg}\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \Leftrightarrow \operatorname{tg}\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{tg} x$$

$$2x+\frac{\pi}{3}=x+k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

$$\text{DE} \quad x\in(0,\pi), \text{ ezért } M=\left\{\frac{2\pi}{3}\right\}.$$




$$\operatorname{ctg} x = b \in \mathbb{R} \iff x = \operatorname{arcctg} b + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$
$$\operatorname{ctg} u(x) = \operatorname{ctg} v(x) \iff u(x) = v(x) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

**4. Oldd meg a $\cos 2x + 3\cos x = 1,\ \ x \in \mathbb{R}$ egyenletet!**

$$\cos 2x + 3\cos x = 1 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0 \xLeftrightarrow[t\in[-1,1]]{t=\cos x}$$

$$2t^2 + 3t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \in [-1,1] \ \vee \ t = -2 \notin [-1,1]$$

$$\Longrightarrow t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left\{ \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

**4. Oldd meg a $\cos 2x + 3\cos x = 1,\ \ x \in \mathbb{R}$ egyenletet!**

$$\cos 2x + 3\cos x = 1 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0 \overset{t=\cos x}{\underset{t\in[-1,1]}{\Longleftrightarrow}}$$
$$2t^2 + 3t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \in [-1,1] \ \vee\ t = -2 \notin [-1,1]$$
$$\Longrightarrow t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left\{ \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \middle| k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

**5. Oldd meg a $2\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 1,\ \ x \in \mathbb{R}$ egyenletet!**

$$2\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 1 \Leftrightarrow$$
$$2\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 3\cos^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x \Leftrightarrow$$
$$\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0 \mid : \cos^2 x \neq 0 \Leftrightarrow$$
$$\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 2 = 0 \Leftrightarrow (\operatorname{tg} x - 1)(\operatorname{tg} x - 2) = 0 \Leftrightarrow$$
$$x \in \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \{\operatorname{arctg} 2 + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}.$$

**6. Oldd meg a $\sin x + 2\cos^2 \frac{x}{2} = 1,\ x \in \mathbb{R}$ egyenletet!**

$$\sin x + 2\cos^2 \frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow \sin x + 1 + \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 0$$

$$\sin x = -\cos x \big| : \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -1 \Leftrightarrow x \in \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

# $\sin x$, $\cos x$-ben lineáris trigonometrikus egyenletek

**6. Oldd meg a $\sin x + 2\cos^2 \frac{x}{2} = 1,\ \ x \in \mathbb{R}$ egyenletet!**

$$\sin x + 2\cos^2 \frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow \sin x + 1 + \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 0$$

$$\sin x = -\cos x \Big| : \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -1 \Leftrightarrow x \in \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

**7. Oldd meg a $\sin x + \cos x = 1,\ \ x \in \mathbb{R}$ egyenletet!**

$$\sin x + \cos x = 1 \Big| : \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\sin \frac{\pi}{4} \sin x + \cos \frac{\pi}{4} \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$x - \frac{\pi}{4} = \pm \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Leftrightarrow$$

$$x \in \left\{ 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \middle| k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

**7. Oldd meg a $\sin x + \cos x = 1,\ x \in \mathbb{R}$ egyenletet!**

II. megoldási módszer:

$$\begin{cases} \sin x + \cos x = 1 \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases} \xLeftrightarrow[b=\cos x]{a=\sin x} \begin{cases} a + b = 1 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases} \xLeftrightarrow[p=ab]{s=a+b} \begin{cases} s = 1 \\ s^2 - 2p = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} s = 1 \\ p = 0 \end{cases} \Rightarrow t^2 - st + p = 0 \Leftrightarrow t^2 - t = 0 \Leftrightarrow t(t-1) = 0 \Rightarrow t_1 = 0, t_2 = 1$$

$$\text{(i) } a = 0 \wedge b = 1 \quad \vee \quad \text{(ii) } a = 1 \wedge b = 0$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(i)} & \sin x = 0 \wedge \cos x = 1 \Longleftrightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{(ii)} & \sin x = 1 \wedge \cos x = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right| \Longrightarrow$$

$$M = \left\{ 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

# További feladatok

1. Számítsd ki!
   a) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$
   b) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
   c) $\operatorname{arcctg}\sqrt{3} - \operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$
   d) $\sin\left(2\arcsin\frac{3}{5}\right)$
   e) $\cos\left(2\arcsin\frac{1}{3}\right)$
   f) $\sin\left(\frac{\pi}{3} - \arcsin\frac{1}{3}\right)$
   g) $\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg}3)$

2. Oldd meg az alábbi egyenleteket!
   a) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}, x \in \mathbb{R}$
   b) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}, x \in (0, \pi)$
   c) $\sin x = \cos x, x \in [0, 4\pi]$
   d) $3\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0, x \in \mathbb{R}$
   e) $\sin 2x = \cos x, x \in \mathbb{R}$
   f) $\sin x = 1 + \cos^2 x, x \in \mathbb{R}$
   g) $\cos 2x + \sin x = 0, x \in \mathbb{R}$
   h) $\cos^2 x + \cos^2 2x = 1, x \in \mathbb{R}$