

Különféle ábrázolási
MÓDSZEREK
az elemi
MATEMATIKÁBAN

Készítette: Tuzson Zoltán ©
Székelyudvarhely

Ábrázolásra nem csak a geometriában van szükség és lehetőség!

Ábrázolni az elemi matematika sok más területén lehet, és szükséges is!

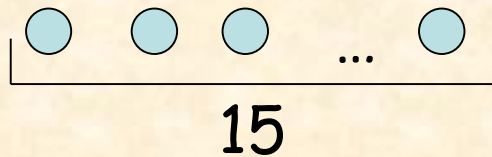
Mire jó az ábrázolás?

- Rendszerezi az adatokat
- Tükrözi az adatok közötti viszonyokat, összefüggéseket
- Könnyebbé teszi egy feladat megoldását
- Szemléletesebbé, áttekinthetőbbé teszi a megoldást
- Érthetőbbé válik mind a feladat, mint a megoldása
- Sematizálásra ad lehetőséget, stb.

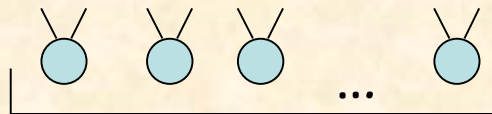
1. Feladat: Egy udvaron tyúkok és nyulak szaladgálnak. Összesen 15 fej és 40 láb látható. Hány tyúk és hány nyúl van?

Megoldás:

1) 15 fej van összesen:

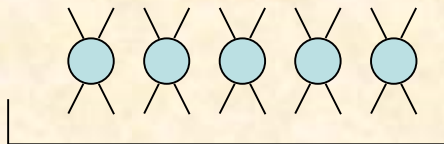


2) Minden állatnak van legalább két lába:

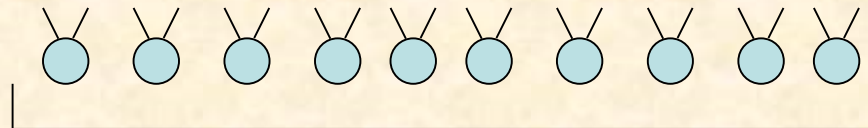


$$15 \times 2 = 30 \text{ láb}$$

3) De így marad még $40 - 30 = 10$ láb ami $10 : 2 = 5$ nyúlé



5 nyúl

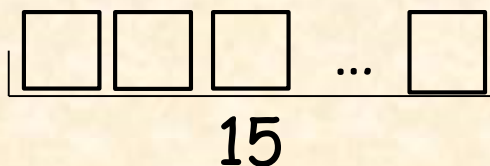


15-5=10 tyúk

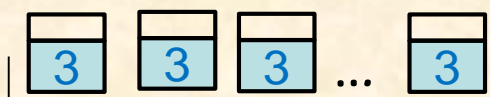
2. Feladat: Beleöntenek 50 liter vizet 15 edénybe, amelyek közül egyesek 3 liter, mások 4 liter űrtartalmúak. Hány edény van mindegyikből külön-külön?

Megoldás:

1) 15 üres edény van összesen:

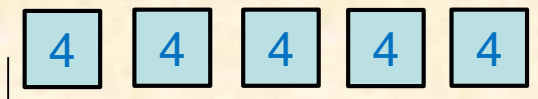


2) Minden edénybe fér legalább legalább 3 liter:

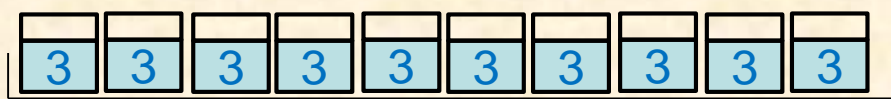


$$15 \times 3 = 45 \text{ liter víz}$$

3) De így marad még $50 - 45 = 5$ liter víz $5 : 1 = 5$ edénybe



5db 4 literes



$15 - 5 = 10$ db 3 literes

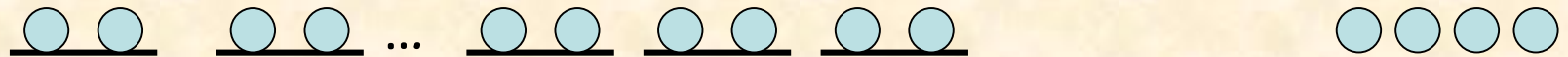
3. Feladat: Egy osztályban a tanulókat, ha 2-esével ültetjük a padokba, akkor 4 tanuló állva marad. De ha 3-asával ültetjük, akkor 2 üres pad marad. Hány tanuló, és hány pad van?

Megoldás:

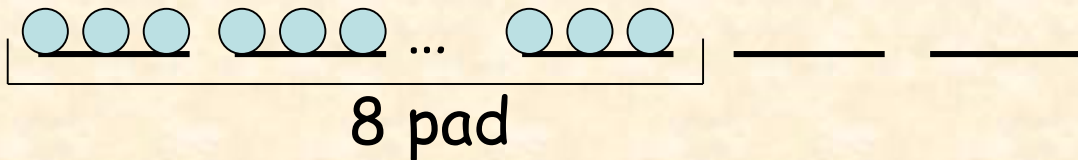
1) Ültessük le a tanulókat 2-esével:



2) Üresítsük meg a 2 padot, amikor 3-man ülnek majd:



3) Most ültessük le a 8 tanulókat, hogy 3-asával legyenek



4) Tehát: $8 \times 3 = 24$ tanuló és $8 + 2 = 10$ pad van!

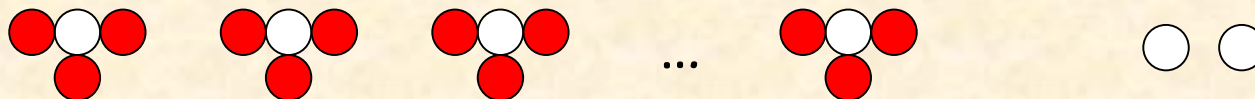
4. Feladat: Egy urnában 3-szor több piros golyó van, mint fehér. Ha ellenben kivesszünk 6 piros golyót, és beteszünk 2 fehéret, akkor az urnában 2-szer több piros golyó lesz, mint fehér. Hány piros illetve fehér golyó volt kezdetben?

Megoldás:

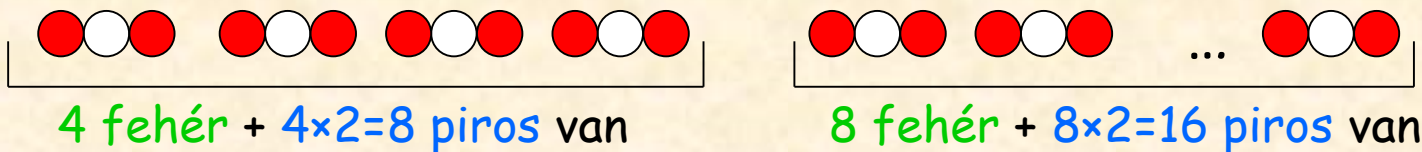
1) A piros golyó 3-szor több mint a fehér:



2) Távolítsuk el a 6 piros golyót, adjuk hozzá a 2 fehéret



3) A piros golyó most 2-szer több mint a fehér:



4) Az elején $12-2=10$ fehér, $24+6=30$ piros volt

Megjegyzés

A 4 fehér golyó mellé így társítottuk a 8 pirosat:






Így maradt a 8 csoport

$8 \times 1 = 8$ fehér és $8 \times 2 = 16$ piros golyóból

Más átcsoportosítás nem lehet!

5. Feladat: Tudjuk, hogy 2 alma, 2 barack és egy citrom együttes tömege 130g. Egy alma és egy barack együtt 55g, továbbá egy alma és egy citrom együtt 50g. Mennyi az egyes gyümölcsök egyenkénti tömege?

Megoldás:

Legyen  = 1 alma tömege,  = 1 barack tömege,  = 1 citrom tömege

1) Fennállnak a következő egyenlőségek:

$$\begin{array}{ccc} \text{●} \text{●} \text{●} \text{●} \text{●} = 130 & (1) & \text{●} \text{●} = 55 & (2) & \text{●} \text{●} = 50 & (3) \end{array}$$

2) A (2) alapján:     = 55 + 55

3) Ezért az (1) alapján: $110 + \text{●} = 130$, ahonnan $\text{●} = 20$ (g)











4) A (3) alapján: $\text{●} + 20 = 50$, ahonnan $\text{●} = 30$ (g)

5) A (2) alapján $30 + \text{●} = 55$, tehát $\text{●} = 25$ (g)

7. Feladat: Arra a kérdésre, hogy hány éves a húga és Kati, ő így felelt: ha a húgom annyi idős lesz mint én vagyok most, akkor együtt 35 évesek leszünk, de ma még én háromszor annyi idős vagyok, mint a húgom volt akkor, amikor én olyan idős voltam, mint a húgom most. Hány éves Kati, Hát a húga?

Megoldás:

Készítsük el a következő táblázatot:

	Múlt	Jelen	Jövő
Kati életkora		  	
Húga életkora			  

Legyen a korkülönbség: \square , ekkor rendre felírható, hogy:

$$\text{red circle} \text{ red circle} \text{ red circle} \text{ sun} = 35 \quad (1), \quad \text{light blue circle} = \text{red circle} \text{ square} \quad (2)$$

$$\text{red circle} \text{ red circle} \text{ red circle} = \text{light blue circle} \text{ square} \quad (3) \quad \text{sun} = \text{red circle} \text{ red circle} \text{ red circle} \text{ square} \quad (4)$$

A (2) és (3) alapján: $\text{red circle} \text{ red circle} \text{ red circle} = \text{red circle} \text{ square} \text{ square} \longrightarrow \text{red circle} \text{ red circle} = \text{square} \text{ square} \longrightarrow \text{red circle} = \text{square}$

Az (1) és (4) alapján: $\text{red circle} \text{ red circle} \text{ red circle} \text{ red circle} \text{ red circle} \text{ red circle} \text{ square} = 35$

Tehát: $\bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \square = 35$ és $\square = \bullet$, ezért

$$\bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet = 35 \longrightarrow \bullet = 5 \longrightarrow \square = 5$$

$$\circ = \bullet \square \longrightarrow \circ = 10$$

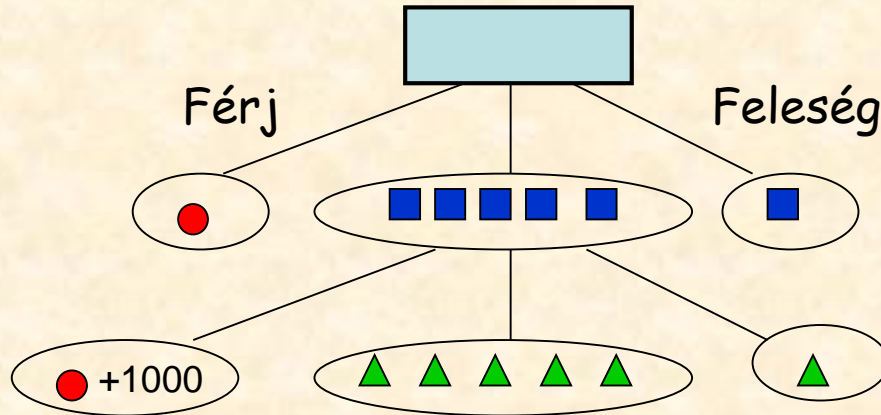
$$\star = \bullet \bullet \bullet \square \longrightarrow \star = 20$$

Tehát jelenleg Kati $3 \times 5 = 15$ éves, és a húga $15 - 5 = 10$ éves.

8. Feladat: 5 házaspár közös kirándulást szervez, amelynek a költségeit közösen fizetik.

- A hozzájárulás mértékét a társaság egyik jól számoló tagja a következőképpen határozta meg: a névsor szerinti első házaspár férfitagja fizet valamekkora összeget, a felesége pedig az ezután fennmaradt költség 6-od részét.
- A következő házaspárból a férj az előző férfinál 1000 lejjel többet fizet, felesége még a fennmaradó költség 6-odrészét, és így tovább.
- A végén kiderült, hogy minden házaspár azonos összeget fizetett.
- Mennyi a kirándulás költsége, és mennyi a házaspáronkénti hozzájárulása?

Megoldás:



$$\bullet \blacksquare = \bullet +1000 \blacktriangle \quad (1)$$

$$\blacksquare \blacksquare \blacksquare \blacksquare \blacksquare = \bullet +1000 \blacktriangle \blacktriangle \blacktriangle \blacktriangle \blacktriangle \blacktriangle \quad (2)$$

$$(1) \longrightarrow \blacksquare = \blacktriangle +1000 \longrightarrow (2)$$

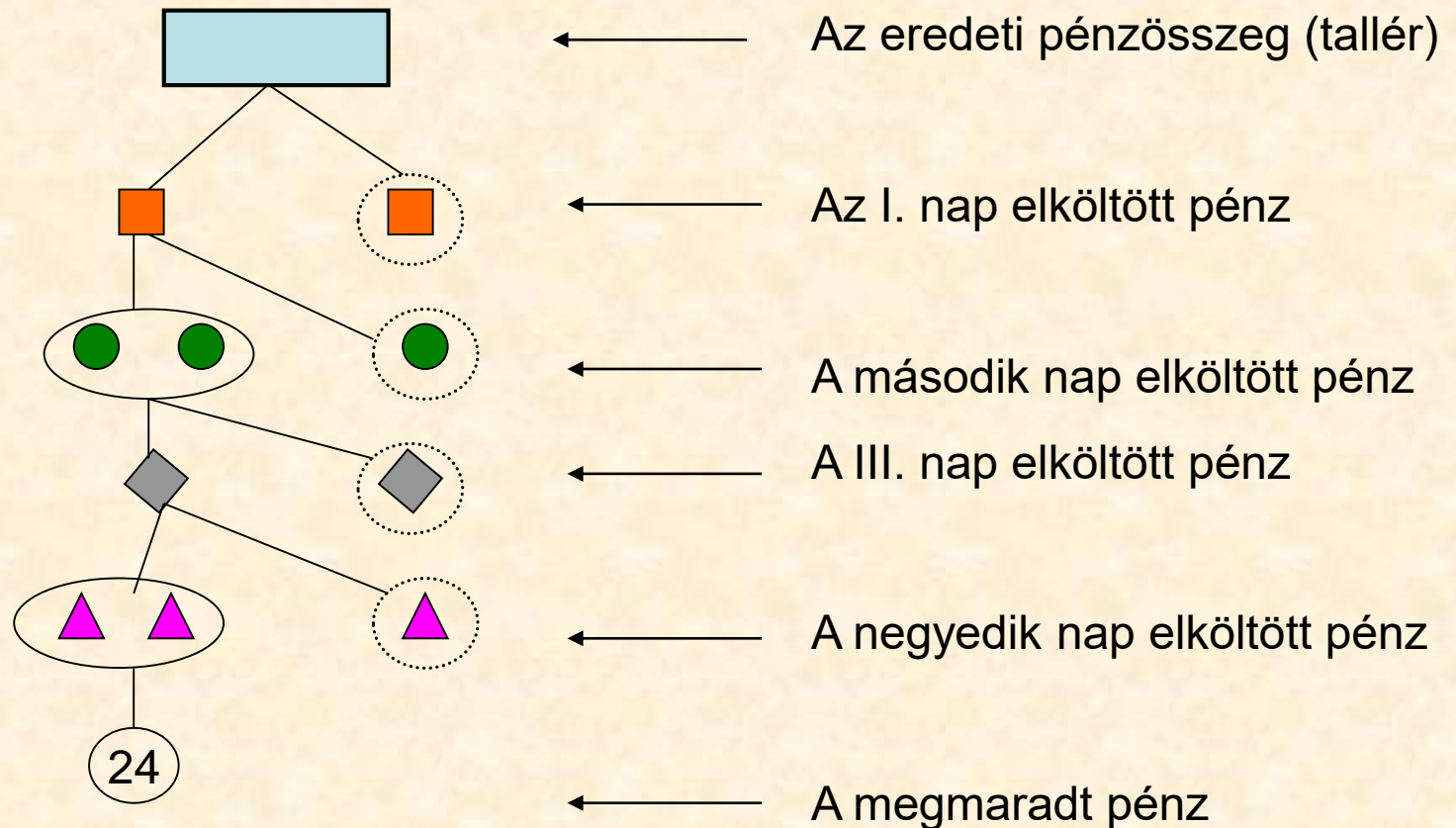
$$(2) \longrightarrow \blacktriangle \bullet = 4000 \longrightarrow \blacksquare \bullet = 5000$$

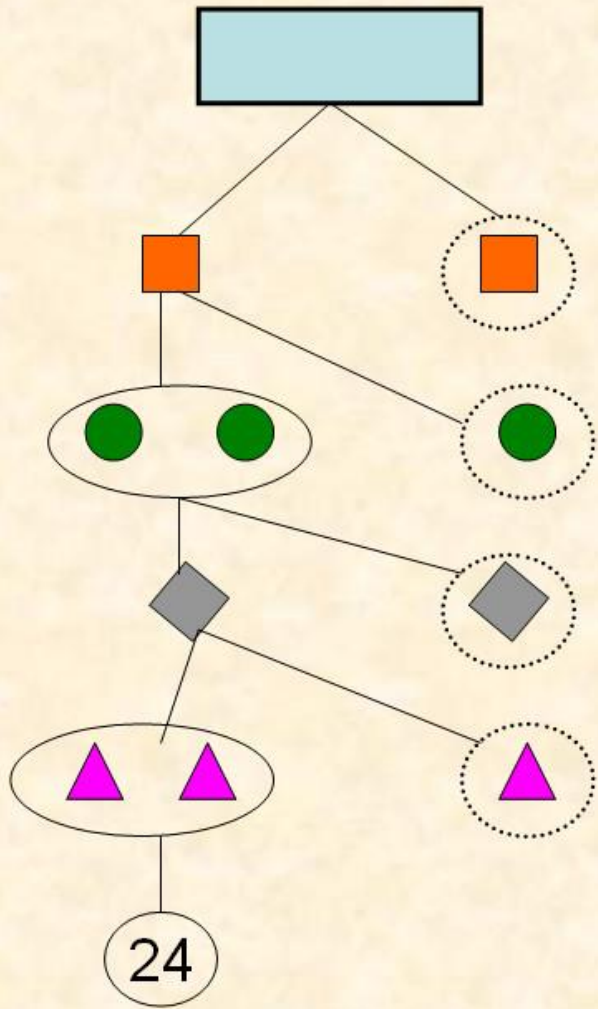
lej a házaspáronkénti hozzájárulás.

Tehát $5 \times 5000 = 2500$ lej a kirándulás költsége

9. Feladat: Ilonka az első nap alatt elköltötte a pénzének a felét, a második nap a meglévő pénzének a harmadát, harmadik nap a meglévő pénzének a felét, negyedik nap a meglévő pénzének a harmadát, így 24 tallérja maradt. Hány tallérja volt Ilonkának eredetileg?

Megoldás:





$\triangle \triangle = 24$, ezért

$\triangle = 12$

$\diamond = \triangle \triangle \triangle$

$\diamond = 36$

$\bullet \bullet = \diamond \diamond$

$\bullet = 36$

$\square = \bullet \bullet \bullet$

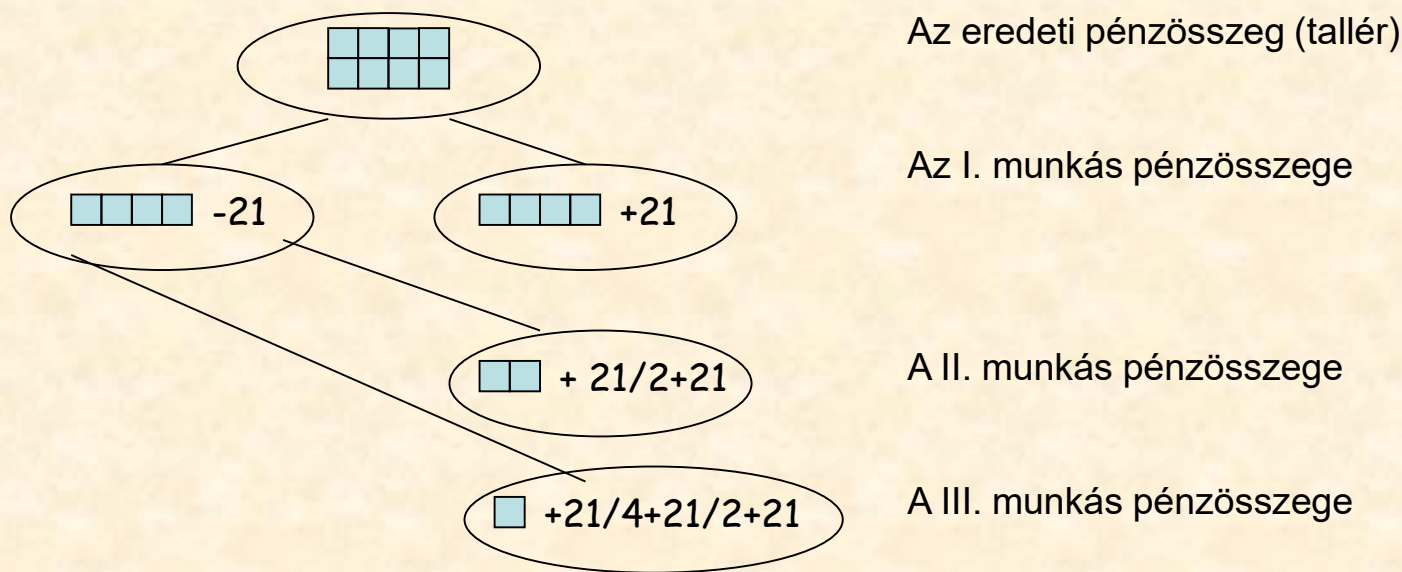
$\square = 108$

$\text{rectangle} = \square \square$

$\text{rectangle} = 216$

10. Feladat: Három munkás egy munkáért kapott pénzösszeget így osztotta el egymás között: az első az összeg felét és még 21 ezer tallért, a második az első pénzösszegének felét és még 21 ezer tallért, a harmadik pedig a második pénzösszegének felét és 21 ezer tallért kapott. Hány tallért kapott külön-külön mindegyik munkás?

Megoldás:



$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} = \square \quad \square \quad \square \quad \square \quad + 3 \times 21 + 2 \times 21/2 + 21/4 \quad \text{ahonnan} \quad \square = 89 + 1/4$$

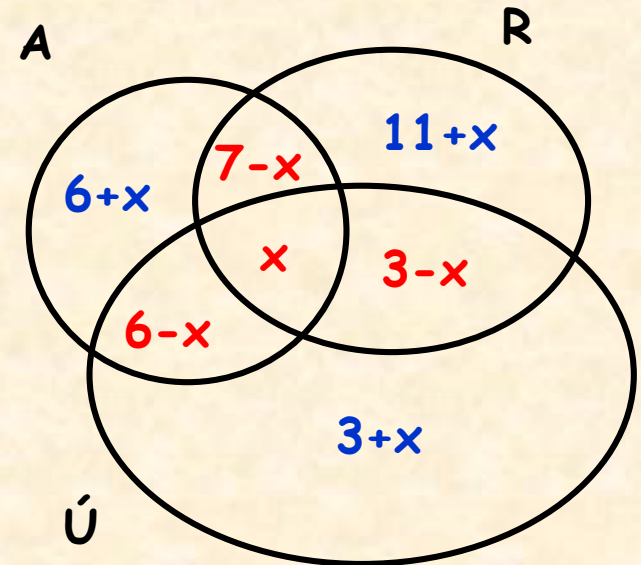
Tehát az I. munkás $4 \times (89 + 1/4) + 21 = 378$ ezer, a II. munkás $2 \times (89 + 1/4) + 21/2 = 210$ ezer, a III. munkás $89 + 1/4 + 21/4 + 21/2 + 21 = 126$ ezer tallért kapott.

11. Feladat: Az osztályban 38 tanuló van. Mindenki űzi a következő sportágak valamelyikét: atlétika, röplabda, úszás. 19-en atletizálnak, 21-en röplabdáznak, 12 tanuló úszik; 7 tanuló atletizál és röplabdázik, 6 tanuló atletizál és úszik, 3 tanuló röplabdázik és úszik. Hány tanuló űzi mindhárom sportot?

Megoldás Venn-Euler diagrammal:

Legyen A , R és $Ú$ rendre az **atletizálók**, **röplabdások** és **úszók** halmaza.

Bentről kifelé haladva töltjük ki a halmazkarikákat: ha $x = |A \cap R \cap Ú|$, akkor sorra $7-x$, $6-x$, $3-x$ írható be, majd $6+x$, $11+x$, $3+x$. Így felírható, hogy:



$$(6+x) + (7-x) + (6-x) + (3+x) + (3-x) + (6-x) + (11+x) + (7-x) + (3-x) + x = 38$$

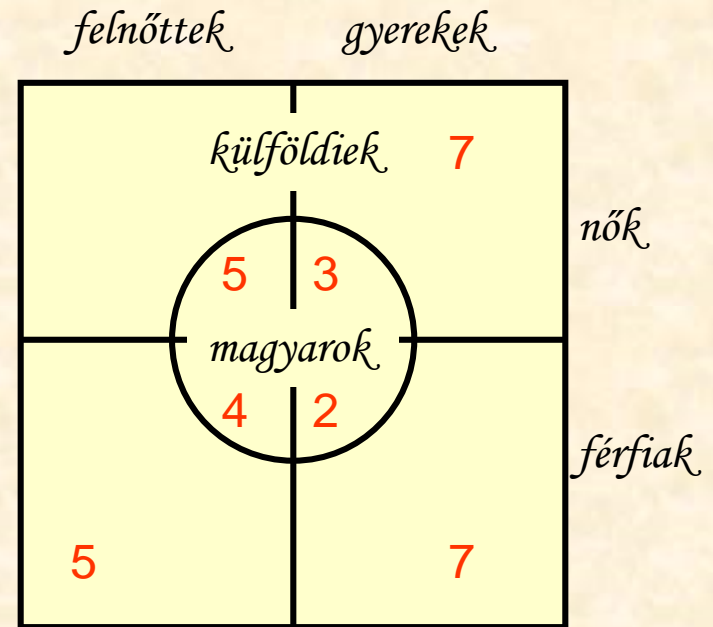
ahonnan $x=2$ a mindhárom sportot űzők száma.

12. Feladat: Egy repülőgép utasairól a következőket tudjuk: 9 fiú, 5 magyar gyermek, 9 felnőtt férfi, 7 külföldi fiú, 14 magyar, 6 magyar férfi (beleértve a magyar fiúkat is) és 7 külföldi leány. Hány utas volt a repülőgépen?

Megoldás:

Készítsük el a mellékelt diagramot:

Leghamarabb a **7 külföldi leány** és a **7 külföldi fiú** írható be a halmazábra megfelelő tartományába. Ezután a **9 fiú** alapján a **2-es** írható be, az **5 magyar** gyerek alapján a **3-as** írható be.



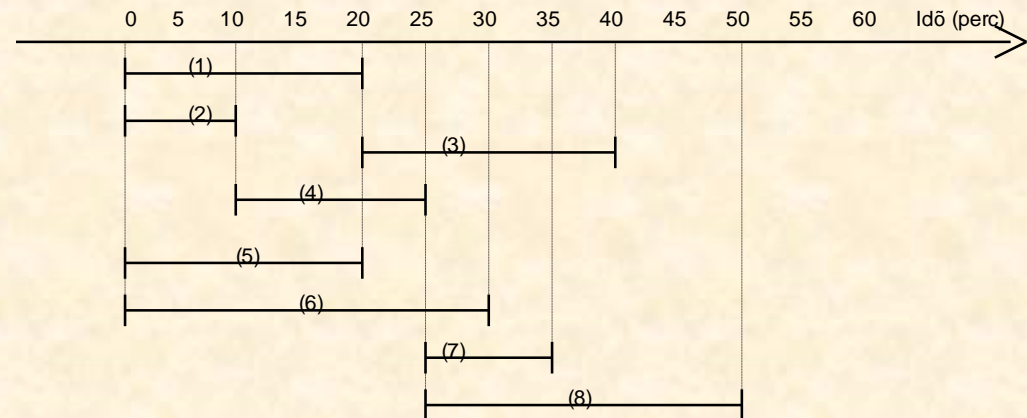
Ugyanakkor a **6 magyar férfi** alapján a **4-est** írjuk be, majd a **14 magyar** alapján a belső **5-ös** írható be. A **9 felnőtt** alapján a külső **5-ös** is beírható. Tehát összesen $2 \times 7 + 2 \times 5 + 4 + 2 + 3 = 33$ utasa volt a repülőgépnek

13. Feladat: Egy repülőgép Bombayból New Yorkba repül, útját Londonban megszakítja. Londonban a következő feladatokat kell elvégezni:

- (1) csomagok kirakodása (szükséges idő: 20 perc),
 - (2) az utasok kiszállása (10 perc),
 - (3) új csomagok berakodása ((1)-es elvégzése után 20 perc),
 - (4) a fedélzet kitakarítása ((2)-es elvégzése után 15 perc),
 - (5) üzemanyag-utánpótlás (20 perc),
 - (6) műszaki ellenőrzés (3) perc,
 - (7) az ételek fedélzetre vitele ((4)-es elvégzése után 10 perc),
 - (8) az új utasok beszállása ((4)-es és (5)-ös elvégzése után 25 perc).
- Határozzuk meg azt a legrövidebb időt, amit a gépnek a földön (Londonban) kell eltöltenie.

A számegyenesen ötönkénti beosztásokkal az időt ábrázoljuk. A számegyenes alatti (1)-(8)-ig számozott szakaszok az egyes műveletek időtartamát ábrázolják.

Az ábráról leolvasható, hogy a nyolc művelet elvégzéséhez szükséges minimális idő 50 perc.



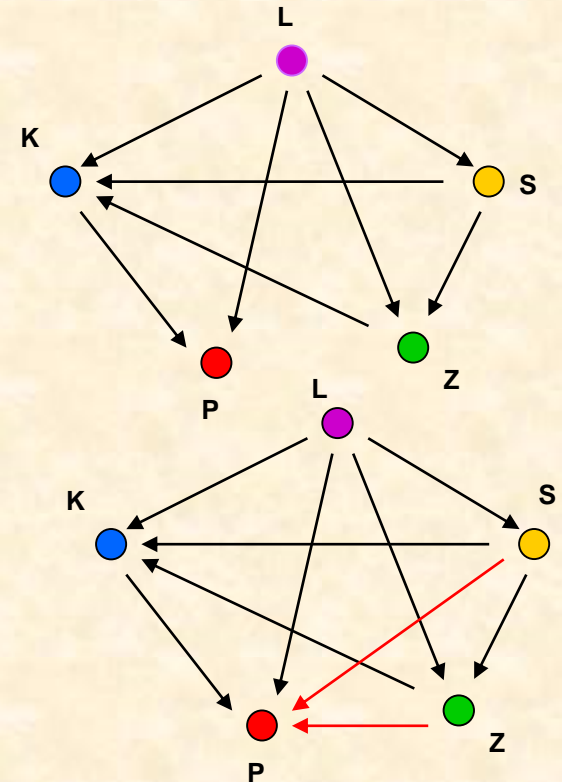
14. Feladat: Festéktüsszentő Hapci Benő 5 szép színes pöttyöt tüsszentett Picur táskájára. A lila lett a legkisebb. A sárga kisebb volt, mint a zöld. A kék viszont a sárgánál és a zöldnél is nagyobb, de kisebb, mint a piros. Írd fel az öt színt nagyság szerinti sorrendben!

Készítsük el a következő nyíldiagramot. Vezessen **nyíl a kisebbik pöttytől a nagyobbik felé**. Az adatok alapján megrajzoltuk a nyilakat!

Vegyük észre, hogy ez a „**nagyobb**” reláció **tranzitív**, tehát ha $A \longrightarrow B$ és $B \longrightarrow C$, akkor $A \longrightarrow C$

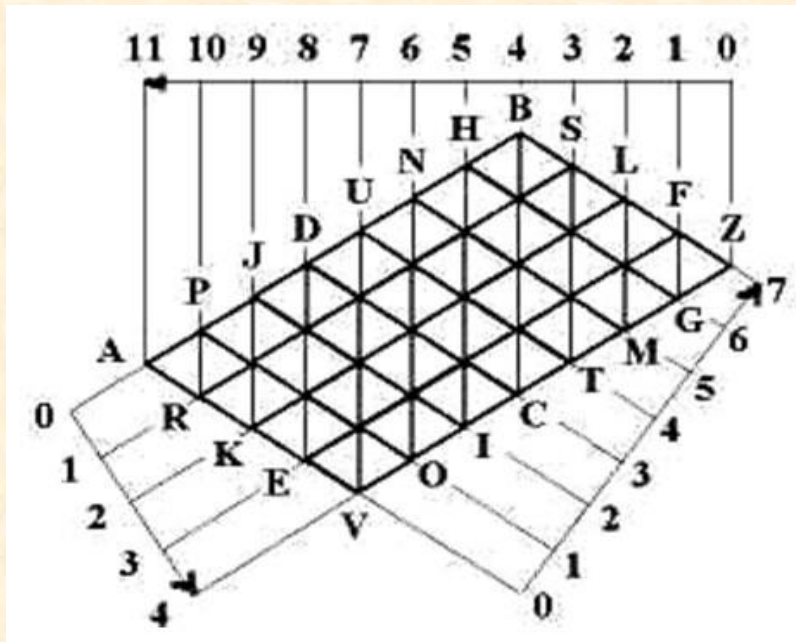
Ezért a ZKP háromszögben meghúzzuk a nyilat ZP közé, így az SZP háromszögben nyíl vezet az SP között (az ábrán pirossal láthatók)

Ha az egyes színekhez „beérkező” nyilak számát megszámozzuk, és ezeket rendezzük, akkor $0 < 1 < 2 < 3 < 4$ alapján, az $L < S < Z < K < P$ megoldás adódik.



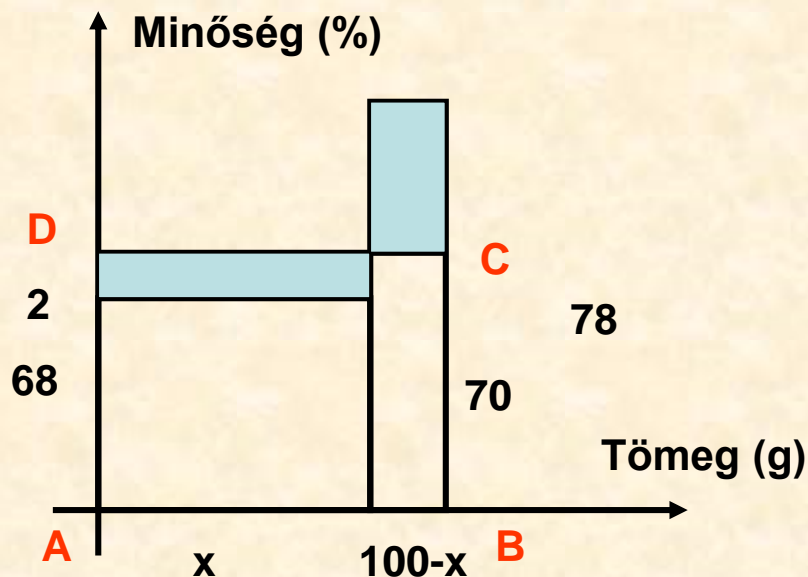
15. Feladat: Egy 11 literes kancsó tele van vízzel. Van egy üres 7 literes és egy üres 4 literes kancsónk. Csupán a három kancsó segítségével mérjük ki 1 liter vizet! Igaz-e, hogy az első kancsóba bármely 1 és 11 liter közötti, a második kancsóba bármely 1 és 7 közötti, valamint a harmadik kancsóba bármely 1 és 4 liter közötti (egész liternyi) vízmennyiség kimérhető, beleértve a jelzett számokat is?

Egy képzeletbeli biliárd asztalon egy golyó A-tól indul, sorra az A, B, C, D,...,Z pontokba pattan. Az állapotok a mellékelt táblázatban vannak.



	11	7	4
A	11	0	0
B	4	7	0
C	4	3	4
D	8	3	0
E	8	0	3
F	1	7	3
G	1	6	4
H	5	6	0
I	5	2	4
J	9	2	0
K	9	0	2
L	2	7	2
M	2	5	4
N	6	5	0
O	6	1	4
P	10	1	0
R	10	0	1
S	3	7	1
T	3	4	4
U	7	4	0
V	7	0	4
Z	0	7	4

16. Feladat: Két edényben 68%-os és 78%-os kénsavoldatunk van. Milyen arányban kell keverjük ezeket, és melyikből mennyire van szükség 100 g 70%-os oldat előállításához?



A keresett 68%-os kénsavoldat mennyiségének mérőszámát x -szel jelöljük. Induljunk ki egy 68 és x méretű téglalapról. Rajzoljuk mellé a $100 - x$ alapú és 78 magasságú téglalapot. A felvett magasságon jelöljük ki a 70-et. Az ABCD téglalap területe a 100 g 70%-os oldatban levő kénsav mennyiségét jelenti, akárcsak az x és 68, valamint a $100 - x$ és 78 méretű téglalapok területeinek az összege.

Ezért a két árnyékolt téglalap területe egyenlő.

Tehát $2x = 8(100 - x)$, vagyis $10x = 800$, ahonnan $x = 80$ (g), ez a 68%-os kénsavoldat mennyiségét, a $100 - x = 20$ (g) pedig a 78%-os kénsavoldat mennyiségét jelöli.

A keverési arány (az említett sorrend mellett) 80 : 20, vagyis 4 : 1.

Köszönöm a figyelmet!



VÉGE