Arányosság

Az $\frac{a}{b}$ törtszámot az a és a b szám arányának, egyszerűen aránynak nevezzük.

Az $\frac{a}{b}$ arány értéke azt fejezi ki, hogy az a szám hányszor nagyobb a b számnál, illetve a b szám hányszor kisebb az a számnál. Az arányokkal végezhető két legfontosabb művelet a bővítés és az egyszerűsítés: $\boxed{{}^{k)}\frac{a}{b} = \frac{k\cdot a}{k\cdot b}}$ illetve $\boxed{\frac{k\cdot a}{k\cdot b}^{(k} = \frac{a}{b}}$ ahol k nem nulla.

A gyakorlatban előforduló mennyiségek nem elszigetelten változnak, kapcsolatban vannak egymással, függnek egymástól. A legegyszerűbb kapcsolat az egymástól függő mennyiségek között az egyenes és fordított arányosság.

1. értelmezés
Két, egymástól függő változó mennyiség egyenes arányban van egymással, ha:
a) az egyik növekedésével (csökkenésével) a másik is nő (csökken);
b) ha az egyik *n*-szeresére növekszik ($n\in\mathbb{N}^*$, csökken), akkor a másik is *n*-szeresére növekszik (csökken).

1. tétel
Az M_1, illetve M_2 mennyiségek x_1 és x_2, illetve y_1 és y_2 értékeire egyenes arányosság esetén az $\boxed{\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}}$ vagy $\boxed{\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}}$ aránypárok írhatók fel.

2. értelmezés
Két, egymástól függő változó mennyiség fordított arányban van egymással, ha
a) az egyik növekedésével (csökkenésével) a másik csökken (növekszik);
b) ha az egyik *n*-szeresére növekszik ($n\in\mathbb{N}^*$, csökken), akkor a másik *n*-ed részére csökken (növekszik).

2. tétel
Az M_1, illetve M_2 mennyiségek x_1 és x_2, illetve y_1 és y_2 értékeire fordított arányosság esetén az $\boxed{\frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{\frac{y_2}{y_1}}}$ vagy $\boxed{\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}}$ vagy $\boxed{\frac{x_1}{\frac{1}{y_1}} = \frac{x_2}{\frac{1}{y_2}}}$ aránypárok írhatók fel.

3. értelmezés
Több, egyenlő értékű arányt egyenlő *arányok sorozatának* nevezzük. Tehát, ha

$$\frac{a_1}{b_1} = k,\ \frac{a_2}{b_2} = k, \dots\ \frac{a_n}{b_n} = k,\ \text{akkor}\ \boxed{\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}}\quad n\in\mathbb{N}^*\backslash\{1\}.$$

Amennyiben $n = 2$ (tehát két egyenlő arányról van szó), az aránypár megnevezést használjuk.

Az aránypárok tulajdonságai

* <u>*Az aránypárok alaptulajdonsága*</u>:

$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow a\cdot d=b\cdot c}$ vagyis a kültagok szorzata egyenlő a beltagok szorzatával.

* <u>*Az aránypár ismeretlen tagjának a kiszámolása*</u>:

$$\boxed{a=\frac{b\cdot c}{d}},\ \boxed{b=\frac{a\cdot d}{c}},\ \boxed{c=\frac{a\cdot d}{b}},\ \boxed{d=\frac{b\cdot c}{a}}$$

* <u>Változatlan tagú származtatás</u>:

- *felcseréljük a beltagokat*: $\boxed{\frac{a}{c}=\frac{b}{d}}$

- *felcseréljük a kültagokat*: $\boxed{\frac{d}{b}=\frac{c}{a}}$

- *felcseréljük a beltagokat és a kültagokat is*: $\boxed{\frac{d}{c}=\frac{b}{a}}$

- *megfordítjuk az arányt:* $\boxed{\frac{b}{a}=\frac{d}{c}}$

* <u>Megváltoztatott tagú származtatás</u>:

$$\boxed{\frac{a\cdot f}{b\cdot f}=\frac{c}{d}},\ \boxed{\frac{a}{b}=\frac{c\cdot f}{d\cdot f}},\ \boxed{\frac{a\cdot f}{b}=\frac{c\cdot f}{d}},\ \boxed{\frac{a}{b\cdot f}=\frac{c}{d\cdot f}}$$

$$\boxed{\frac{a:f}{b:f}=\frac{c}{d}},\ \boxed{\frac{a}{b}=\frac{c:f}{d:f}},\ \boxed{\frac{a:f}{b}=\frac{c:f}{d}},\ \boxed{\frac{a}{b:f}=\frac{c}{d:f}}$$

$$\boxed{\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}},\ \boxed{\frac{a}{b+a}=\frac{c}{d+c}},\ \boxed{\frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+d}}$$

$$\boxed{\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}},\ \boxed{\frac{a}{b-a}=\frac{c}{d-c}},\ \boxed{\frac{a}{b}=\frac{a-c}{b-d}}$$

$$\boxed{\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}},\ \boxed{\frac{a+b}{c+d}=\frac{a-b}{c-d}}$$

$$\boxed{\frac{f\cdot a+k\cdot b}{p\cdot c+q\cdot b}=\frac{f\cdot c+k\cdot d}{p\cdot c+q\cdot d}}$$

$$\boxed{\frac{a^2}{b^2}=\frac{c^2}{d^2}}$$

A tulajdonságoknak a bizonyítása az alaptulajdonság segítségével történik!

Következmény:

Az aránypárok tulajdonsága alapján levezethető az egyenlő arányok sorozatának egy fontos tulajdonsága:

$$\frac{x_1}{a_1}=\frac{x_2}{a_2}=...=\frac{x_n}{a_n}=\frac{k_1x_1+k_2x_2+...+k_nx_n}{k_1a_1+k_2a_2+...+k_na_n},\ n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\},$$

Arányos mennyiségekkel kapcsolatos feladatok

Egyszerű hármasszabállyal megoldható feladatok

A hármasszabály, az arányos mennyiségek három ismert értékének és a kiszámítandó ismeretlen értékének írásbeli elrendezését jelenti, az ismeretlen kiszámolása céljából.

1. <u>feladat</u>: Egy 5 főből álló szerelőcsoport naponta 30 motort tud összeszerelni. Hány motort tud összeszerelni naponta 8 munkás?

   Leghamarabb azt vegyük észre, hogy a „létfő-szám" és a „motor darab-szám" *<u>egyenes arányban</u>* vannak!

✓ megoldás egységre hozatallal:

5 fő ....30 motor
1 fő .... 30: 5= 6 motor
8 fő .... 8×6=48 motor

✓ megoldás aránypárokkal:

5 fő ....30 motor
8 fő...x motor

Mivel egyenesen arányosságról van szó, az értelmezés alapján felírható, hogy $\boxed{\frac{5}{8}=\frac{30}{x}}$ ahonnan

$$x=\frac{8\times 30}{5}=48\ (motor)$$

✓ megoldás egyszerű hármasszabállyal:

✓ 5 fő ....30 motor
✓ 8 fő ....x motor

$$x=\frac{8\times 30}{5}=48\ (motor)$$

2. <u>feladat</u>: 6 munkás egy munkát 4 óra alatt végez el. Ugyanezt a munkát 8 munkás hány óra alatt végezi el?

   Leghamarabb azt vegyük észre, hogy a „munkások száma" és az „óra" *<u>fordított arányban</u>* vannak!

✓ megoldás egységre hozatallal:

6 munkás ....4 óra
1 munkás .... 6×4=24 óra
8 munkás .... 24:8=3 óra

✓ megoldás aránypárokkal:

6 munkás ....4 óra
8 munkás...x óra

Mivel egyenesen arányosságról van szó, az értelmezés alapján felírható, hogy $\boxed{\frac{6}{8} = \frac{x}{4}}$ ahonnan

$$x = \frac{6 \times 4}{8} = 3 \text{ (óra)}$$

✓ megoldás egyszerű hármasszabállyal:

6 munkás ....4 óra
8 munkás ....x óra

$$x = \frac{6 \times 4}{8} = 3 \text{(óra)}$$

3. <u>feladat</u>: Egy kertből 20 felnőtt és 15 gyerek 12 nap alatt szedi le a gyümölcsöt, napi 7 órát dolgozva. Hány nap alatt szedi le a gyümölcsöt, ugyanakkora területről, egy 12 felnőttből és 20 gyerekből álló csoport, ha napi 6 órát dolgoznak és tudjuk azt, hogy 5 gyermek napjában ugyanannyi gyümölcsöt szed le mint 4 felnőtt.

A feladatban lényegében 2 mennyiség van: a munkás (felnőtt, illetve felnőtt munkájával egyenlő munkát végző gyermek), és az idő (órában mérve).

Először is próbáljuk meg a gyermek munkáját felnőtt munkában kifejezni, így egyfajta munkásról lesz szó.

5 gyermek ....4 felnőtt
15 gyermek ....x felnőtt

Mivel egyenes arányosságról van szó, ezért $\boxed{\frac{5}{15} = \frac{4}{x}}$ ahonnan $x = \frac{15 \times 4}{5} = 12$ (felnőtt)

Az első csoportban tehát 20+12=32 munkás volt, akik 12×7= 84 órát dolgoztak.

5 gyermek ....4 felnőtt
20 gyermek ....x felnőtt

Mivel egyenes arányosságról van szó, ezért $\boxed{\frac{5}{20} = \frac{4}{x}}$ ahonnan $x = \frac{20 \times 4}{5} = 16$ (felnőtt)

A második csoportban 12+ 16= 28 munkás dolgozott nem tudni, hogy hány órát.

Tehát

32 munkás .... 84 óra
28 munkás .... x óra

Ezúttal a munkások száma és a munkaidő (órában) <u>*fordított arányban vannak*</u>, tehát:

$\boxed{\frac{32}{28} = \frac{x}{84}}$ ahonnan $x = \frac{32 \times 84}{28} = 96$ (óra).

A 96 óra napi 6 órát ledolgozva $\frac{96}{6} = 16$ nap.

Összetett hármasszabállyal megoldható feladatok

Akkor beszélünk összetett hármasszabályról, ha a feladatban 2-nél több arányos mennyiség van.

1. <u>feladat</u>: 13 azonos hozamú csapon 72 perc alatt 4680 l víz folyik ki. Mennyi idő alatt folyik ki 9 ugyanilyen csapon 6750 l víz?

   A megoldás során mindig 2 mennyiséggel dolgozunk, a többit változatlanul hagyva!

   A megoldás során dolgozhatunk <u>*egységre hozatallal*</u> vagy <u>*több egyszerű hármasszabállyal*</u>, vagy az <u>*aránypárokkal*</u>. Ebben az esetben is ez utóbbival dolgozunk.

   A feladat szerkezete:
   13 csap .... 4680 l .... 72 perc
   9 csap .... 6750 l .... x perc

   A feladat megoldása összetett hármasszabállyal, ahol a csapok száma lesz változatlan:
   13 csap .... 4680 l .... 72 perc
   13 csap ....6750 l .... y perc

   Mivel itt a „liter vízmennyiség” és az „idő (perc)” egyenes arányban vannak, ezért:
   $\boxed{\frac{4680}{6750} = \frac{72}{y}}$ ahonnan $y = \frac{1350}{13}$

   Most változtassuk meg a csapok számát is:
   13 csap .... 6750 l .... $\frac{1350}{13}$ perc
   9 csap .... 6750 l .... x perc

   Mivel itt a „csapok száma” és az „idő (perc)” fordított arányban vannak, ezért:
   $\boxed{\frac{13}{9} = \frac{x}{\frac{1350}{13}}}$ ahonnan $x = 150$ (perc).

   A feladat megoldása gyorsítható, ha kidolgozunk egy számítási szabályt. Nézzük a feladat adatait:
   13 csap .... 4680 l .... 72 perc
   9 csap .... 6750 l .... x perc

   Az előző két számolási menetet egybevetve arra következtethetünk, hogy az x ugyanannyi, ha így számoljuk ki: $\frac{9}{13} \cdot \frac{4680}{6750} = \frac{72}{x}$

   <u>*A gyorsított eljárás szabályai a következők:*</u>
   1) Felírjuk a feladat szerkezetét két sorba úgy, hogy az azonos mennyiségek értékei egymás alá kerüljenek.

2) Megállapítjuk, hogy az ismeretlent tartalmazó mennyiség milyen arányban áll a többi mennyiséggel. Ha egyenes arányban áll akkor „lefele nyilat", ha fordított arányban áll, akkor „felfele nyilat" teszünk az illető oszlop mellé.
3) Ahová fordított irányú nyíl kerül, ott az arány fordítottját vesszük, máshol magát az arányt. Az így kapott ismert arányokat összeszorozzuk, és egyenlővé tesszük az ismeretlent tartalmazó aránnyal.

Nézzünk egy példát is. Gyorsított eljárással oldjuk meg a következő feladatot:

2. feladat: 8 szövőnő napi 6 órai munkával 840 m vásznat 5 nap alatt sző meg. Hány nap alatt sző meg 630 m vásznat 5 olyan szövőnő, aki naponta 9 órát dolgozik?

8 szövőnő ↑............6 óra / nap ↑............. 840 m ↓............. 5 nap ↓
5 szövőnő .... 9 óra/ nap .... 630 m .... x nap

A fordított vagy egyenes arányosságok alapján, jobboldalról elindulva, kitettük az egyes nyilakat. Ezek szerint $\boxed{\frac{5}{8}\cdot\frac{9}{6}\cdot\frac{840}{630}=\frac{5}{x}}$ ahonnan x= 4 (nap).

Egy mennyiség felosztása adott számokkal arányos részekre

Az ilyen feladatok megoldása során a már említett $\frac{x_1}{a_1}=\frac{x_2}{a_2}=...=\frac{x_n}{a_n}=\frac{k_1x_1+k_2x_2+...+k_nx_n}{k_1a_1+k_2a_2+...+k_na_n}$ származtatás valamilyen formáját használjuk.

1. feladat: Egy menedékházban az elszállásolásért 3 személy 45 000 tallért fizetett. Az első csak 2 napot, a második 3 napot, a harmadik 4 napot tartózkodott ott. Hány tallért fizettek külön-külön?

Algebrai megoldás

Mivel, ha valaki több napot töltött a menedékházban, akkor többet kell, hogy fizessen (annyiszor többet, ahányszor több napot volt ott), az eltöltött napok száma és a fizetendő pénzösszeg egyenes arányban van.
Legyen rendre *x*, *y* és *z* az első, a második, illetve a harmadik személy által fizetett pénzösszeg. Ekkor a következő aránysor írható fel:

$$\boxed{\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}=\frac{x+y+z}{2+3+4}=\frac{45\ \ 000}{9}=5000},$$

ahonnan $x:2=5000 \Rightarrow x=2\times 5000=10\ 000$, $y:3=5000 \Rightarrow y=3\times 5000=15\ 000$, $z:4=5000 \Rightarrow$
$\Rightarrow z = 4\times 5000 = 20\ 000$.
Tehát a személyek rendre 10 000, 15 000, illetve 20 000 tallért fizettek.

Aritmetikai megoldás

Az előző megoldás során tulajdonképpen a következő gondolatmenetet követtük:
1. A 3 személy összesen $2+3+4=9$ napot fizetett ki.
2. Egy napra $45\ 000:9=5000$ tallért fizettek.
3. Az első személy $2\times 5000=10\ 000$ tallért fizetett.
4. A második személy $3\times 5000=15\ 000$ tallért fizetett.
5. A harmadik személy $4\times 5000=20\ 000$ tallért fizetett.

1. **feladat**: Az *A, B, C, D* városok úgy helyezkednek el, hogy az *AB*, *BC*, *CD* távolságok egyenesen arányosak a 3, 4, 2 számokkal. Tudva azt, hogy az *AB* távolság ötszörösének meg a *BC* távolság háromszorosának és a *CD* távolság négyszeresének az összege 350 km, számítsuk ki az *AB*, *BC* és *CD* távolságokat!

Algebrai megoldás
Egyenes arányosságról lévén szó, felírható, hogy:

$$\boxed{\frac{^{5)}AB}{3}=\frac{^{3)}BC}{4}=\frac{^{4)}CD}{2}=\frac{5\cdot AB+3\cdot BC+4\cdot CD}{5\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 2}=\frac{350}{35}=10}\,.$$

Tehát $AB = 3\times 10 = 30$ (km), $BC = 4\times 10 = 40$ (km), $CD = 2\times 10 = 20$ (km).

Aritmetikai megoldás
1. Az AB, BC, CD távolságok rendre a 3, 4, illetve 5 egyenlő részből állnak.
2. Az $5\times AB+3\times BC+4\times CD$ távolságösszeg $5\times 3+3\times 4+4\times 2$ = 35 rész.
3. Az $5\times AB+3\times BC+4\times CD$ távolságösszeg (ami 350 km) pontosan 35 részből áll, ezért 1 rész 350 km : 35 = 10 km.
4. Tehát AB = 3×10 km = 30 km, BC = 4×10 km = 40 km, CD = 2×10 km = 20 km.

2. **feladat:** Négy ács egy házat akar építeni. Az első egymaga 1 év alatt építi fel, a második 2 év alatt, a harmadik 3, a negyedik 4 év alatt. Mennyi idő alatt építik fel az illető házat, ha mind a négy együtt dolgozik?

Algebrai megoldás

Mivel az egyes munkások teljesítménye (az időegység alatt végzett munka) és az építésre fordított idő fordítottan arányos mennyiségek, ha az egyes munkások teljesítményét rendre *x, y, z és t* jelöli, akkor

$$\boxed{\frac{x}{1}=\frac{y}{\frac{1}{2}}=\frac{z}{\frac{1}{3}}=\frac{t}{\frac{1}{4}}=\frac{12x}{12}=\frac{12y}{6}=\frac{12z}{4}=\frac{12t}{3}=\frac{12(x+y+z+t)}{12+6+4+3}=\frac{x+y+z+t}{\frac{1}{\frac{12}{25}}}}\,.$$

Az aránysorból leolvasható, hogy a négy munkásnak együtt $\frac{12}{25}$ évre, azaz (az évet 365 napnak véve) $12\times(365:25)=175+\frac{1}{5}$ napra van szüksége.

Aritmetikai megoldás
Ha mindegyik ács ugyanannyi ideig, 12 évig dolgozna, az első 12 házat, a második 6-ot, a harmadik 4-et, a negyedik 3-at építene fel. Együtt összesen $12+6+4+3=25$ házat építené-nek fel. Egy évet 365 napnak véve a négy ács együtt 1 házat $(12\times 365):25=175+\frac{1}{5}$ nap alatt épít fel.

3. **feladat**: Egy tömbház 3 lépcsőházát 26 munkás festi ki. Hány munkásnak kell dolgoznia mindegyik lépcsőházban ahhoz, hogy az első lépcsőház festése 2 nap alatt, a másodiké 3 nap alatt, a harmadiké pedig 4 nap alatt fejeződjön be? (Feltételezzük, hogy mindegyik munkás ugyanannyi idő alatt ugyanannyi munkát végez.)

Algebrai megoldás
Könnyen belátható, hogy ebben az esetben is fordított arányosságról van szó. Legyen rendre *x, y* és *z* az első, a második, illetve a harmadik lépcsőházban dolgozó munkások száma. Ekkor felírható, hogy

$$\boxed{\frac{x}{\frac{1}{2}}=\frac{y}{\frac{1}{3}}=\frac{z}{\frac{1}{4}}\Rightarrow\frac{12x}{6}=\frac{12y}{4}=\frac{12z}{3}=\frac{12(x+y+z)}{6+4+3}=\frac{12\cdot 26}{13}=24}.$$

A 12-vel való bővítést (akárcsak az előző feladat esetében is) a törtekkel való műveletvégzés elkerülése és az algebrai, valamint az aritmetikai megoldás közelítése céljából végeztem.
Tehát

$$\frac{x}{\frac{1}{2}}=24\Rightarrow x=\frac{24}{2}=12 \qquad \text{munkás,}$$

$$\frac{y}{\frac{1}{3}}=24\Rightarrow y=\frac{24}{3}=8 \qquad \text{munkás,}$$

$$\frac{z}{\frac{1}{4}}=24\Rightarrow z=\frac{24}{4}=6 \qquad \text{munkás.}$$

Aritmetikai megoldás

Ugyancsak a törtekkel való műveletek elkerülése céljából úgy képzeljük el, mintha a 26 munkás ugyanannyi ideig (12 napig) dolgozna.

1. A 12 nap alatt az első lépcsőház munkásai $12:2=6$ lépcsőházat, a második lépcsőház munkásai $12:3=4$ lépcsőházat, a harmadik lépcsőház munkásai $12:4=3$ lépcsőházat tudnak kifesteni.
2. Tehát 12 nap alatt a 26 munkás $6+4+3=13$ lépcsőházat tud kifesteni.
3. Ezért 12 nap alatt $26:13=2$ munkás 1 lépcsőházat fest ki.
4. Így $2\times 12=24$ munkásnak kell dolgoznia ahhoz, hogy egy lépcsőház 1 nap alatt ki legyen festve.
5. Az első lépcsőházat 2 nap alatt $24:2$ munkás, a második lépcsőházat 3 nap alatt $24:3=8$ munkás, a harmadik lépcsőházat 4 nap alatt $24:4=6$ munkás festi ki.

4. <u>feladat</u>: Egy medence feltöltéséhez 3 csapot használhatunk. A csapok vízhozamáról a következőket tudjuk: az első és a második csap együtt 3 óra, a második és a harmadik együtt 4 óra, míg a harmadik és az első csap együtt 6 óra alatt töltené meg a medencét. Hány óra alatt töltenék fel a medencét a csapok külön-külön?

Algebrai megoldás

Jelöljük rendre *x*-szel, *y*-nal és *z*-vel az első, második, illetve harmadik csap vízhozamát (az 1 óra alatt kifolyt vízmennyiséget). Mivel a vízhozam és a medence megtöltéséhez szükséges idő között fordított arányosság áll fenn, a következő aránysor írható fel:

$$\boxed{\frac{x+y}{\frac{1}{3}}=\frac{y+z}{\frac{1}{4}}=\frac{z+x}{\frac{1}{6}}=\frac{2(x+y+z)}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}}=\frac{x+y+z}{\frac{3}{8}}} \text{, ahonnan}$$

$$\boxed{\frac{x+y+z}{\frac{3}{8}}=\frac{y+z}{\frac{1}{4}}=\frac{x+y+z-(y+z)}{\frac{3}{8}-\frac{1}{4}}=\frac{x}{\frac{1}{8}}}$$

Hasonlóan $\boxed{\frac{x+y+z}{\frac{3}{8}}=\frac{x+z}{\frac{1}{6}}=\frac{y}{\frac{5}{24}}}$ és $\boxed{\frac{x+y+z}{\frac{3}{8}}=\frac{x+y}{\frac{1}{3}}=\frac{z}{\frac{1}{24}}}$.

Az aránysorokból leolvasható, hogy az első csap a medencét 8 óra alatt, a második $\frac{24}{5}=4\frac{4}{5}$ óra alatt, a harmadik csap pedig 24 óra alatt töltené meg.