

A logikai táblázat módszere I.

1. feladat

A Portia három ládikáján a következő feliratok vannak:

Az aranyon: A kép ebben a ládikában van.

Az ezüstön: A kép nem ebben a ládikában van.

Az ólmon: A kép nem az arany ládikában van.

Portia azt is közölte, hogy a legfeljebb egy állítás igaz. Nos, melyik ládikót válassza a kérő, hogy igényt tarthasson Portia kezére?

Megoldás

A feliratok mindegyike lehet hamis, ezt 0, 0, 0 módon jelöljük. Lehet, hogy pontosan egyik állítás igaz, ekkor 1, 0, 0 illetve 0, 1, 0 illetve 0, 0, 1 jelölést használunk aszerint, hogy az állítás az első, a második vagy a harmadik ládikán igaz. Ezeket a számokat logikai értékeknek nevezzük, és eszerint állapítjuk meg a feliratok igazságértékét, amiket a következő táblázatba foglalunk össze. Az A, E illetve Ó jelek az arany, az ezüst és az ólom ládikákat jelölik.

Jelölje K a képet, és Ü azt, hogy az illető ládikó üres. Mivel két üres ládikó lehet, ezért a következő táblázatot készíthetjük el:

A ládikák tartalma	A feliratok logikai értéke			Konklúzió
	A	E	Ó	
$K \wedge \bar{U} \wedge \bar{U}$	1	1	0	lehetetlen
$\bar{U} \wedge K \wedge \bar{U}$	0	0	1	E
$\bar{U} \wedge \bar{U} \wedge K$	0	1	1	lehetetlen

Két esetben azzal kerültünk ellentmondásba, hogy a három felirat közül legfeljebb csak egy igaz, egy esetben ugyanazt a választ kaptuk, mint az előbb.

2. feladat

A Portia három ládikáján a következő feliratok vannak:

Az aranyon: A kép nem az ezüst ládikában van.

Az ezüstön: A kép nem ebben a ládikában van.

Az ólmon: A kép ebben a ládikában van.

Portia azt is közölte, hogy a legalább egy állítás igaz, és legalább egy hamis. Nos, melyik ládikót válassza a kérő, hogy igényt tarthasson Portia kezére?

Megoldás

Készítsük el a következő táblázatot:

A ládikák tartalma	A feliratok logikai értéke			Konklúzió
	A	E	Ó	
$K \wedge \bar{U} \wedge \bar{U}$	1	1	0	A
$\bar{U} \wedge K \wedge \bar{U}$	0	0	0	lehetetlen
$\bar{U} \wedge \bar{U} \wedge K$	1	1	1	lehetetlen

Itt azzal kerültünk ellentmondásra, hogy legalább az egyik állítás igaz, és legalább az egyik állítás hamis.

Franck Stockton „A hölgy vagy a tigris” című történetében, egy rabnak két szoba között kellett választania, az egyikben egy hölgy, a másikban egy tigris található. Ha az előbbit választja, akkor feleségül veheti a hölgyet, ha az utóbbit, akkor (valószínűleg) felfalja őt a tigris. Egy gazdag országnak a királya megkedvelte ezt az ötletet, és Ó is ezt alkalmazta a rabjaira.

3. feladat

A szobák ajtóin a feliratok a következők:

I. szoba: Legalább az egyik szobában hölgy van.

II. szoba: A másik szobában tigris van.

A király azt is közölte, hogy vagy mindkét állítás igaz, vagy mindkét állítás hamis. A szobákban pedig vagy hölgy, vagy tigris van, bármelyik összetételben. Nos, melyik szobát válassza a rab?

Megoldás

Ez a feladat is megoldható az előző feladatoknál alkalmazott első módszerrel, de mivel az elvontabb, csupán a bemutatott második módszert alkalmazzuk. Jelölje H1 illetve H2 azt, hogy az első illetve második

szobában hölgy van. Hasonlóan T1 illetve T2, a tigrisre vonatkozóan. Megvizsgáljuk a feliratok logikai értékét, a szobák tartalmának a függvényében. A következő logikai táblázat készíthető:

A szobák tartalma	A feliratok logikai értéke		Konklúzió
	I. szoba	II. szoba	
$H1 \wedge H2$	1	0	lehetetlen
$H1 \wedge T2$	1	0	lehetetlen
$T1 \wedge H2$	1	1	H2
$T1 \wedge T2$	0	1	lehetetlen

Tehát a hölgy a II. szobában van, az I. szobában pedig tigris van.

4. feladat

A szobák ajtóin a feliratok a következők:

I. szoba: Mindkét szobában hölgy van.

II. szoba: Mindkét szobában hölgy van.

A király még azt is közölte, hogy ha az első szobában hölgy van, a felirat igaz, ha tigris van, a felirat hamis. Ha a második szobában hölgy van, akkor a felirat hamis, ha tigris van, akkor igaz. A szobákban pedig vagy hölgy, vagy tigris van, bármelyik összetételben. Nos, melyik szobát válassza a rab?

Megoldás

A király által közölt feltételeket sematizáljuk így:

$$H1 \rightarrow 1, T1 \rightarrow 0, H2 \rightarrow 0, T2 \rightarrow 1$$

Az előző feladat megoldási módszeréhez hasonlóan, ezúttal is a következő logikai táblázatot készítjük el:

A szobák tartalma	A feliratok logikai értéke		Konklúzió
	I. szoba	II. szoba	
$H1 \wedge H2$	1	1	lehetetlen
$H1 \wedge T2$	0	0	lehetetlen
$T1 \wedge H2$	0	0	H2
$T1 \wedge T2$	0	0	lehetetlen

Minden sorban kihangsúlyoztuk azt a szobátartalmat és azt a logikai értéket, amelyek ellentmondóak (ellentmondanak a király által közölt feltételeknek). Tehát az első szobában tigris, a másodikban hölgy van.

5. feladat

A király ezúttal három szobát használt fel, az ajtókra a következő feliratokat tette:

I. szoba: A II. szobában tigris van.

II. szoba: Ebben a szobában tigris van.

III. szoba: Az I. szobában tigris van.

A király közölte, hogy egy hölgyet, és két tigrist rejtett el, továbbá a hölgy szobáján a felirat igaz, a tigriseket tartalmazó szobán legalább egyik felirat hamis. Nos, melyik szobát válassza a rab?

Megoldás

Készítsünk az előzőekhez hasonló logikai táblázatot:

A szobák tartalma	A feliratok logikai értéke			Konklúzió
	I. szoba	II. szoba	III. szoba	
$H1 \wedge T2 \wedge T3$	1	1	0	H1
$T1 \wedge H2 \wedge T3$	1	0	1	lehetetlen
$T1 \wedge T2 \wedge H3$	1	1	1	lehetetlen

Minden sorban kihangsúlyoztuk azt a szobátartalmat és azt a logikai értéket amelyek ellentmondóak (ellentmondanak a király által közölt feltételeknek). Tehát az első szobában hölgy, a második kettőben pedig tigris van.

6. feladat

A szobák ajtóin a feliratok a következők:

- I. szoba: A III. szoba üres.
- II. Az I. szobában tigris van.
- III. Ez a szoba üres.

A király közölte, hogy a szobák egyike üres, másikban hölgy, illetve tigris van. Továbbá közölte, hogy ha a szobában hölgy van, akkor a felirat igaz, ha tigris van, akkor a felirat hamis, ha üres, akkor lehet akár igaz, akár hamis. Melyik szobában található a hölgy, illetve a tigris?

Megoldás

Elkészítjük a logikai táblázatot, de figyelembe kell vennünk a hölgy–tigris–üres tartalmak összes elrendezési lehetőségét.

A szobák tartalma	A feliratok logikai értéke			Konklúzió
	I. szoba	II. szoba	III. szoba	
$H1 \wedge T2 \wedge \bar{U}3$	1	0	1	H1
$\bar{H}1 \wedge \bar{U}2 \wedge T3$	0	0	0	lehetetlen
$T1 \wedge H2 \wedge \bar{U}3$	1	1	1	lehetetlen
$\bar{U}1 \wedge H2 \wedge T3$	0	0	0	lehetetlen
$T1 \wedge \bar{U}2 \wedge H3$	0	1	0	lehetetlen
$\bar{U}1 \wedge T2 \wedge H3$	1	0	0	lehetetlen

Tehát a hölgy az I. szobában, a tigris a II. szobában van.

Minden sorban kihangsúlyoztuk azt a szobatartalmat és azt a logikai értéket, amelyek ellentmondóak (ellentmondanak a király által közölt feltételeknek).

7. feladat

András, Béla és Csaba arra fogadtak, hogy a barátságos labdarugó tornán, résztvevő három csapat – az FTC, az MTK, a Vasas és a Honvéd – milyen eredményt fog elérni:

- (a) András: A győztes vagy az FTC vagy az MTK lesz.
- (b) Béla: Az FTC nem lesz első.
- (c) Csaba: Sem a MTK sem a Honvéd nem lesz első.

A labdarugó torna végén kiderült, hogy pontosan az egyikük állítása igaz. Melyik csapat nyerte a tornát?

Megfejtés

Készítsük el a következő logikai táblázatot. Jelöljük a táblázatban + jellel azokat a csapatokat, amelyek a kijelentések szerint megnyerhetik a tornát.

Név\Csapat	FTC	MTK	Vasas	Honvéd
András	+ (1-a)	+ (1-a)		
Béla		+ (2-b)	+ (2-b)	+ (2-b)
Csaba	+ (3-c)		+ (3-c)	

Az (a) állítás alapján beírtuk a + jelt az (1-a) mellé, a (b) állítás alapján a (2-b) mellé, a (c) állítás alapján pedig a (3-c) mellé. Mivel, csak az egyiküknek volt igaza, ezért a negyedik oszlopban szereplő + jel arra utal, hogy a tornát a Honvéd csapata nyerte meg.

8. feladat

Városunkban minden hétfőn zárva tart a húsbolt, kedden a háztartási bolt, csütörtökön a cipész. A látszerész csak hétfőn, szerdán és pénteken van nyitva. Vasárnap minden üzlet zárva van.

Egyszer négy barátnő – Anna, Irma, Klára és Sára – bevásárolni ment, mindegyik csak egy-egy, de más-más boltba. Útközben így beszélgették meg egyes bajos dolgaikat:

- (a) Anna: Sárával már korábban el akartunk menni, de ezen a héten, de egyetlen olyan nap sem volt, amikor mindketten el tudtuk volna végezni a bevásárlást.
- (b) Irma: ma nem akartam eljönni otthonról, de holnap már nem kapnám meg azt amit keresek.
- (c) Klára: tulajdonképpen én tegnap vagy tegnapelőtt is bevásárolhattam volna.
- (d) Sára: én tegnap vagy holnap is vásárolhatnék.

Ki melyik üzletben akar bevásárolni?

Megoldás

Először is készítsük el az egyes üzletek nyitvatartási rendjét.

Ezt, a jobb áttekinthetőség kedvéért a következő táblázatba foglaltuk össze, ahol az egyes napokat a nevük kezdőbetűjével, azt pedig, hogy nincs nyitva, az X-el jelöltük.

Bolt/nap	H	K	Sze	Cs	P	Szo	V
Húsbolt	X						X
Háztartási		X					X
Cipész				X			X
Látszerész		X		X		X	X

A táblázatból könnyen leolvasható, hogy a vásárlási nap vagy egy szerdai vagy pénteki nap lehetett. De a pénteki nap nem lehet, mert akkor az (a) szerint ez ellentmondás, hiszen a szerdai napon is elvégezheték volna a vásárlást, de az (a) éppen az ellenkezőjét állítja.

Tehát a vásárlás napja szerdára esik. Annak a megállapítása céljából, hogy ki melyik üzletbe ment vásárolni, készítsük el a következő logikai táblázatot, ami ebben az esetben éppen logikai négyzet.

Bolt/név	Anna	Irma	Klára	Sára
Húsbolt	–	–	–	+ (2-d)
Háztartási		–	–	–
Cipész	–	–	+ (1-c)	–
Látszerész	–	+ (3-b)	–	–

Leghamarabb a (c) alapján az (1-c) írható be, így + jellel jelöltük meg a (Klára–Cipész) összetartozást, és ennek a sorába illetve oszlopába a – jelt tettük, mint elemi kizárásokat. Ezután a (2-d) beírása következett, ahova szintén a + jel került, mint a (Sára–Húsbolt) összetartozás szimbóluma. Ennek az oszlopába illetve sorába ahol nincsen, szintén a – elemi kizárások jele került. Ezt követően a + (3-b) beírása is megtörténhet, és ennek a sorába illetve az oszlopába szintén a – jelt írjuk, tehát újabb összetartozás az (Irma–Látszerész). És végül, csak az (Anna–Háztartási bolt) összetartozás mezője maradt üres. Így hát a táblázatból leolvasható, hogy Klára a cipésznél, Sára a húsboltba, Irma a látszerésznél és Anna a háztartási boltba vásárolt.

Természetesen, a táblázat más sorrendben is kitölthető, de az eredmény mindenképpen ugyan ez.

9. feladat

Arthur király, életének 30. nyarára, lovagi tornára hívta össze 5 legderekabb vitézét: Sir Lancelotot, Sir Gauwainet, Sir Gryest, Sir Marhaust és Sir Genawant. A torna a következő képen zajlott: a torna folyamán, senki sem küzdött kétszer, ugyanazzal az ellenféllel, és senki sem küzdött 2-nél többször. Tudjuk még, hogy:

- (1) Sir Genawan nem vállalta a III. viadalát Sir Gryessel.
- (2) Sir Marhaus csak Sir Lancelottal küzdött.
- (3) Sir Gryest kitiltották a tornáról, mert orvul támadt ellenfelére.

Ki kivel küzdött?

Megoldás

Elkészítjük a következő logikai négyzetet, ahol **x** azt jelenti, hogy nem küzdöttek, és **o** azt jelenti, hogy megküzdöttek egymással. A megoldás jobb áttekinthetősége végett az egyes oszlopokat 1, 2, 3, 4, 5 számokkal, az egyes sorokat az A, B, C, D, E betűkkel jelöljük meg.

		1	2	3	4	5
		Lancelot	Gauwaine	Marhaus	Genawan	Gryes
A	Lancelot	x	x	o	o	x
B	Gauwaine	x	x	x	o	o
C	Marhaus	o	x	x	x	x
D	Genawan	o	o	x	x	x
E	Gryes	x	o	x	x	x

Senki sem küzdött önmagával, tehát A1, B2, C3, D4, E5 → x; (2) ⇒ C1, A3 → o, C2, C4, C5, B3, D3, E3 → x; (1) ⇒ D5, E4 → x. Genawan a II. viadalát nem vállalta, ezért 2 viadala volt, így D1, D2, A4, B4 → o. Lancelotnak már 2 viadala van, ezért Gauwainnel és Grysszel nem vívhat, így A2, A5, B1, E1 → x. (3) ⇒ Gryes

eddig senkivel sem küzdött, de mivel orvul támadt ellenfelére, valakivel vívnia kellett, és a táblázatban csak E2, B5 → o maradt.

Megjegyzés: az „ x megküzdött y -nal” reláció szimmetrikus, tehát akkor „ y megküzdött x -szel” is igaz, hiszen ketten együtt küzdöttek. Ilyen esetben tehát az x és az y illetve az y és az x találkozásához o szimbólumot tettünk.

10. feladat

Egy papírlapra négy síkidomot rajzoltunk: egyik háromszög, másik téglalap, harmadik kör, a negyedik négyzet alakú. Minden idom más-más színű: zöld, sárga, piros vagy kék. Milyen sorrendben helyezkednek el az idomok és melyik milyen színű, ha tudjuk, hogy:

- A piros idom közvetlenül a zöld és a kék között van.
- A sárga idomtól jobbra a téglalap van.
- A kör jobbra van a háromszögtől és a téglalaptól is.
- A téglalap nincs a szélen.
- A kék idom nincs a sárga mellett.
- A háromszög nem sárga.

Megoldás

Először is állapítsuk meg az idomok elhelyezkedésében a sorrendet. Az (a) alapján a sorrend kék, piros, zöld vagy zöld, piros, kék. Az (e) állítással egybevetve a sorrend kék, piros, zöld, sárga (1) vagy (sárga, zöld, piros, kék (2)). Ellenben a (b) alapján a (1) eset nem lehetséges, hiszen a sárga idomtól jobbra nincs más színű idom. Készítsük el a következő logikai táblázatot, ami ezúttal logikai négyzet is:

Idom\Szín	Sárga (I.)	Zöld (II.)	Piros (III.)	Kék (IV.)
Háromszög	– (9-f)	– (5)	+ (10)	– (8-c)
Téglalap	– (1-d)	+ (3-b)	– (4)	– (2-d)
Kör	– (15)	– (6)	– (11)	+ (13-c)
Négyzet		– (7)	– (12)	– (14)

A kitöltést az (1-d) alapján kezdtük, és a számok sorrendjében következett a (7)-ig. Ezután a (8-c) és (9-f) beírása nyilvánvaló. Innen folytatólagosan a (10) marad, majd a (11) és (12) következik. A (c) alapján a kör nem lehet sárga, így a (13-c) következik, majd a (14), (15). A táblázatból kiolvashatók az egyes alakzatok színe.

11. feladat

Az iskolai asztaltenisz bajnokság után Anna, Bea, Cili, Dóri és Eszter így nyilatkoztak:

- Anna: Dóri a második lett, sajnos én csak a harmadik lettem.
- Bea: Első lettem, Cili pedig a második.
- Cili: Harmadik lettem, szegény Bea utolsó lett.
- Dóri: Második lettem, Eszter lecsúszott a negyedik helyre.
- Eszter: Egyetlen versenyzőt sikerült megelőznöm, de jó Annának, mert ő lett az első.

Utólag kiderült, hogy csak az egyik lány állítás igaz. Állítsd össze a verseny helyezési listáját.

Megoldás

Jelölje a_1 illetve a_2 az (a) állítások közül az első, illetve a második állítást. Teljesen hasonló jelölést használunk a többi állítás esetén is. Mivel túl sok információval állunk szembe, ezért nem tudunk közvetlenül logikai táblázatot használni, előbb egyszerűsíteni kellene a feltételek adta információkat. Vegyük észre, hogy a d_2 és a e_1 ugyanazt fejezik ki.

Feltételezzük, hogy ez a két állítás hamis. Ekkor d_1 és e_2 igaz. Ezért a d_1 -gyel ellentmondó b_2 állítás hamis, így a b_1 igaz. De ez ellentmond az e_2 -nek, mert így ketten vannak a IV. helyen. Tehát mind a d_1 mind az e_2 állítás igaz. Most készítsük el a következő logikai táblázatot:

Róla\Kijelenti	Anna	Bea	Cili	Dóri	Eszter
Anna	III. i (6-a ₂)				I. h (3-e ₂)
Bea		I. h (9-b ₁)	V. i (8-c ₂)		
Cili		II. i (5-b ₂)	III. h (7-c ₁)		
Dóri	II. h (10-a ₁)			II. h (4-d ₁)	
Eszter				IV. i (1-d ₂)	IV. i (2-e ₁)

A táblázatba oszloponként írjuk be az egyes leány által megfogalmazott mindkét állítást. A helyezéseket I., II., III., IV., V. számokkal jelöljük. Továbbá 1, 2, ..., 10 jelöli az egyes mezők kitöltési sorrendjét, melléje írjuk azt az állítást amelyik szerint igaz, vagy hamis. Ezután beírjuk az i vagy a h betűket, figyelembe véve, hogy egy adott személy két állítása közül pontosan egyik igaz. Az előzőekben megállapítottak szerint d_2 és e_1 egyidőben

igaz, tehát Eszter a IV. helyezést érte el. A táblázat alapján továbbá leolvasható, hogy Anna a III., Bea az V., Cili a II, és végül Dóri az I. helyezést érte el.

12. feladat

Öt különböző színű, egymás mellett elhelyezkedő házban, öt nemzetiségű ember lakik, és mindegyiknek megvan a saját háziállata, kedvenc itala és édessége. Még azt tudjuk, hogy:

- Az angol a piros házban lakik.
- A spanyolnak kutyája van.
- A zöld házban kávéat isznak.
- Az orosz teát iszik.
- Ha a házakkal szembe állsz, a barna ház közvetlen a zöld ház jobbján van.
- Az angol szomszédja tortát eszik.
- A sárga házban pudingot esznek.
- A középső házban tejet isznak.
- A norvég az első házban lakik.
- A tortát evő szomszédja rókát tart.
- A pudingot evő szomszédjának lóva van.
- Aki kekszet eszik, narancslevet iszik.
- Aki fagyit eszik, a kertjében csigákat tart.
- A norvég a kék ház szomszédságában lakik.
- A japán gyümölcssalátát eszik.

Ki iszik vizet, és kinek van zebrája?

Megoldás

A logikai táblázat elkészítése eléggé körülményesnek tűnik, ugyanis nem csak egy relációról van szó, ugyanis a feladatban szó van házszínről, nemzetiségről, kedvenc ételről, kedvenc italról, és kedvenc állatról. Így ezúttal egy összetett logikai táblázatot fogunk készíteni, de azelőtt szükségünk van arra az információra, hogy a balról jobbra sorban elhelyezkedő házak milyen színűek? Ezt az egyes állításokból tudjuk kikövetkeztetni, például így: az (i) és (n) alapján a II. ház kék (1). Az (i) és (a) alapján az I. ház nem piros (2). A (c) és (h) alapján a III. ház nem zöld (3). Az (1), (2), (3) és (e) alapján a IV. ház zöld) és (az V. ház barna) (4). Tehát a házak színe balról jobbra:

I. Sárga, II. Kék, III. Piros, IV. Zöld, V. Barna

Ennek az információnak a birtokában elkészítjük a következő összetett logikai táblázatot, amelyben az 1, 2,... számok az illető mező kitöltésének a sorrendjét jelöli, az a, b, c,... betűk pedig a megadott információk közül felhasznált információt jelöli, amink alapján az illető mezőt kitöltöttük.

Házszín	Sárga	Kék	Piros	Zöld	Barna
Nemzetiség	Norvég (5-i)	Orosz (8-d)	Angol (1-a)	Japán (9-o)	Spanyol (10)
Étel	Puding (3-g)	Torta (10-f)	Fagy (13)	Gyümölcs (9-o)	Keks (7-l)
Ital		Tea (8-d)	Tej (4-h)	Kávé (2-c)	Narancslé (7-l)
Állat	Róka (15-j)	Ló (6-k)	Csiga (14-m)		Kutya (11-b)

Tehát a norvég iszik vizet, és a japán tart zebrát. Természetesen a táblázat kitöltése nem ment ilyen gördülékenyen, mint ahogyan most, a kitöltött állapotban látjuk. A 7. lépésig a kitöltés valóban gördülékenyen megy, ellenben a táblázatban látható (7-l) kitöltés okozza az első komoly problémát. Éppen ezért megjegyezzük a következőket: a (keksz–narancslé) „társítás” csak a kék vagy a barna oszlopba talál (az 1., 2.,...,6. lépések után nem marad más hol hely). Ha a társítás a „kék oszlopba” jut, akkor a (japán–gyümölcssaláta) társítás, ami szintén együtt írható be, „nem fér be” a táblázatba. Marad tehát, hogy a (keksz–narancslé) társítást a „barna oszlopba” írjuk, de ekkor a (japán–gyümölcssaláta) társítás csak a „zöld oszlopba” „fér be”. Innen a folytatás a táblázatban már könnyűszerrel beírható.

Természetesen a táblázatnak más kitöltési sorrendje is létezik, és ugyanehhez az eredményhez vezet.

A bemutatott megoldott feladatok csupán csak ízelítőt képeznek azon feladatmegoldási módszer sokszínűségéből, amit a logikai táblázatok módszerénél alkalmazhatunk. De mindemellett reméljük, hogy a szemléltetések nagymértékben hozzájárultak ahhoz, hogy az érdeklődő Olvasónak megoldási tippeket, ötleteket, és miért ne éppen módszereket nyújtsanak a hasonló típusú logikai feladatok megoldásához.