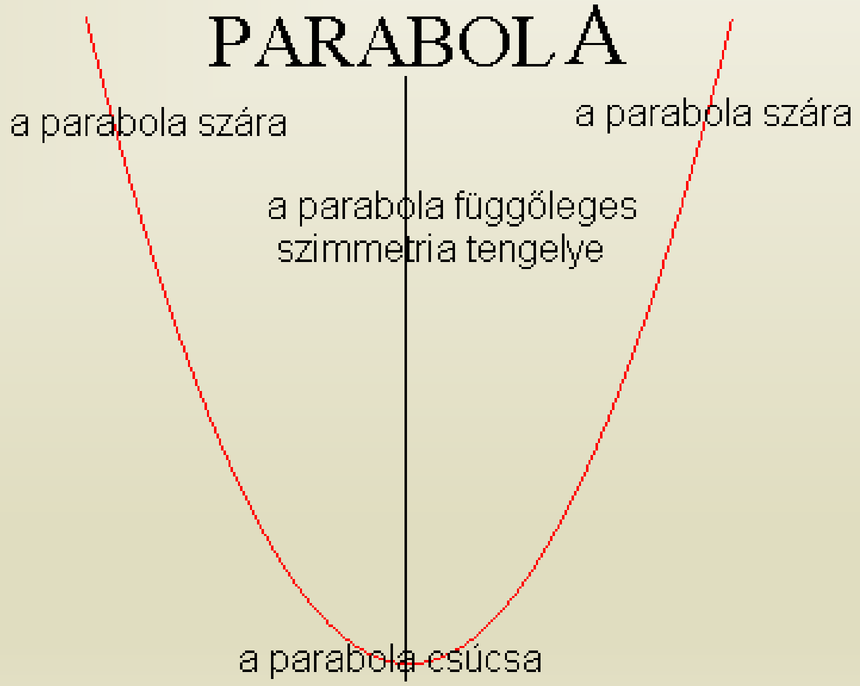
Micimackó meséje a IX. osztályosoknak!

A másodfokú függvény ábrázolása transzformációk segítségével

- Készítette: Tuzson Zoltán, tanár

Az $f(x)=ax^2+bx+c$ másodfokú függvény grafikus ábrája egy <u>parabola</u>

A parabola tulajdonságai és részei az alábbi ábrán láthatók



Az $f(x)=ax^2+bx+c$ parabola ábrázolása több lépésben történik

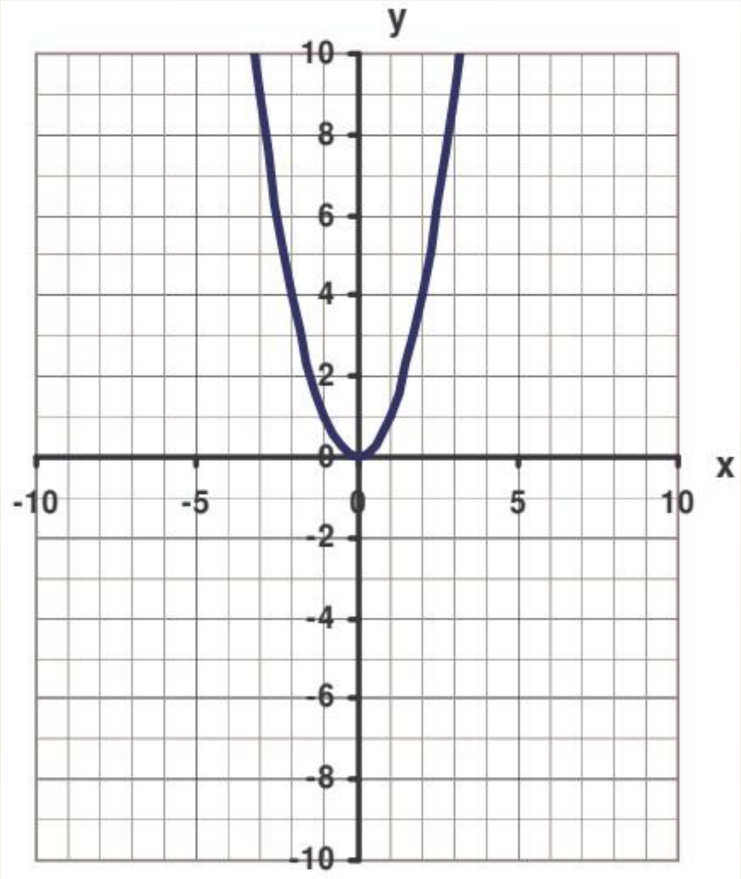
Ezek a következők:

1) Az $f(x)=x^2$ úgynevezett **alapfüggvény** ábrázolása
2) Az $f(x)=-x^2$ függvény ábrázolása
3) Az $f(x)=ax^2$ alakú függvények ábrázolása
4) Az $f(x)=ax^2+c$ alakú függvények ábrázolása
5) Az $f(x)=(x-u)^2$ alakú függvény ábrázolása
6) Az $f(x)=(x-u)^2+v$ alakú függvény ábrázolása
7) Az $f(x)=ax^2+bx+c$ általános parabola ábrázolása

1)

Az $f(x) = x^2$ úgynevezett **alapfüggvény** ábrázolása

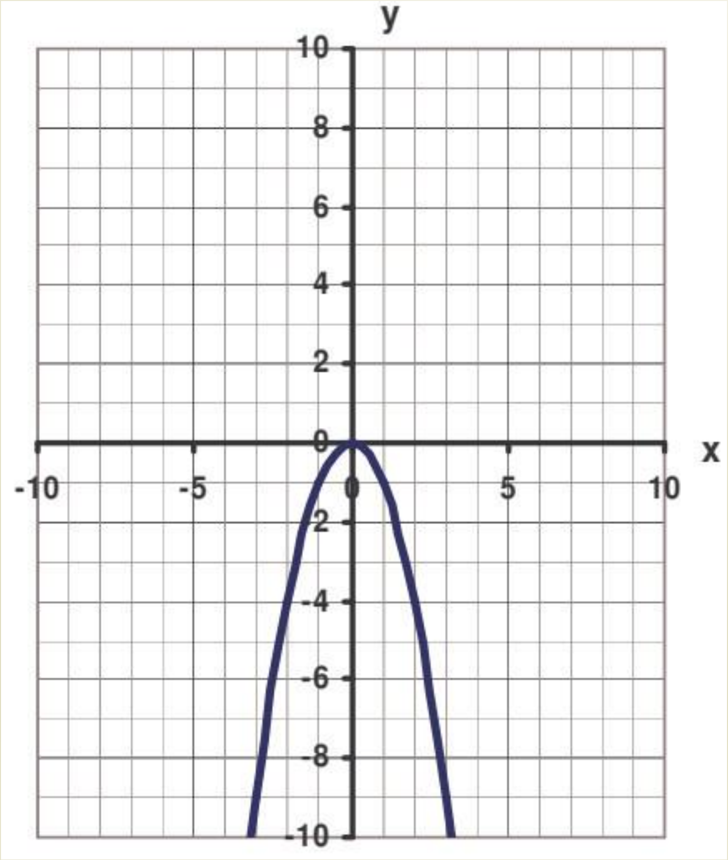
- Az ábrázoláshoz olyan értéktáblázatot készítünk, amelyben $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$



2)

Az $f(x) = -x^2$ függvény ábrázolása

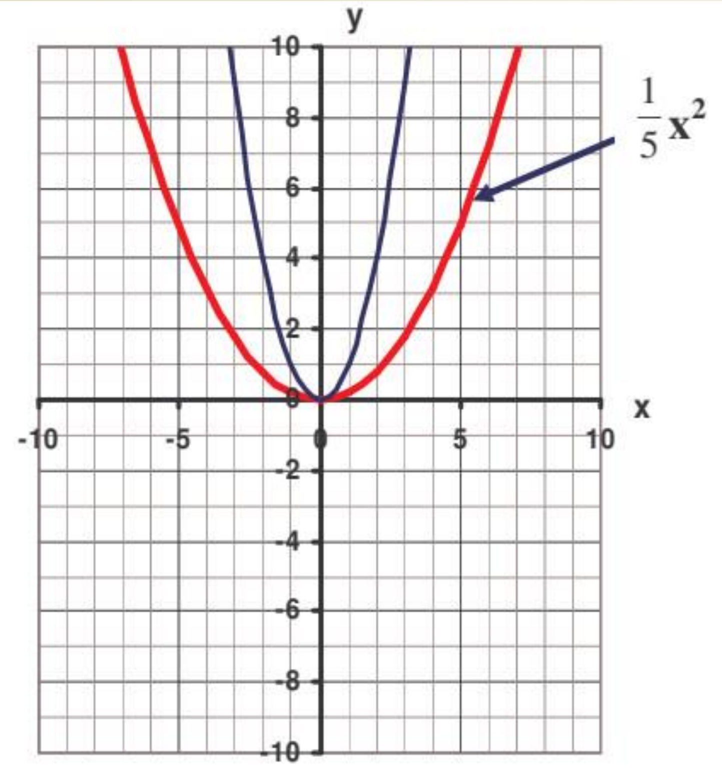
- Az ábrázoláshoz olyan értéktáblázatot készítünk, amelyben $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

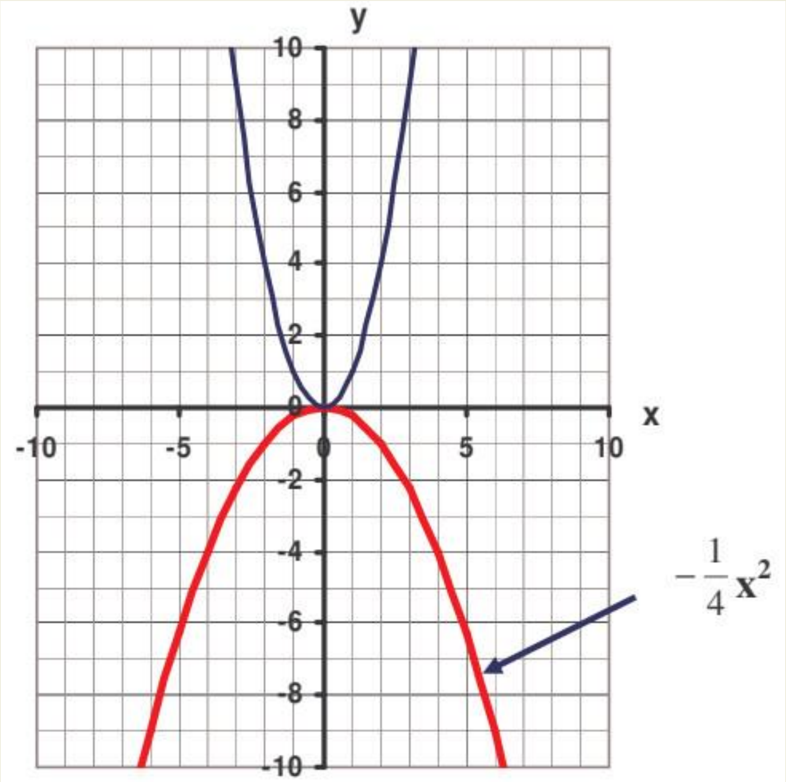


3)

Az $f(x)=\frac{1}{5}x^2$ és $f(x)=-\frac{1}{4}x^2$ függvények ábrázolása

- Az ábrázoláshoz olyan értéktáblázatot készítünk, amelyben $x\in\{-2,-1,0,1,2\}$

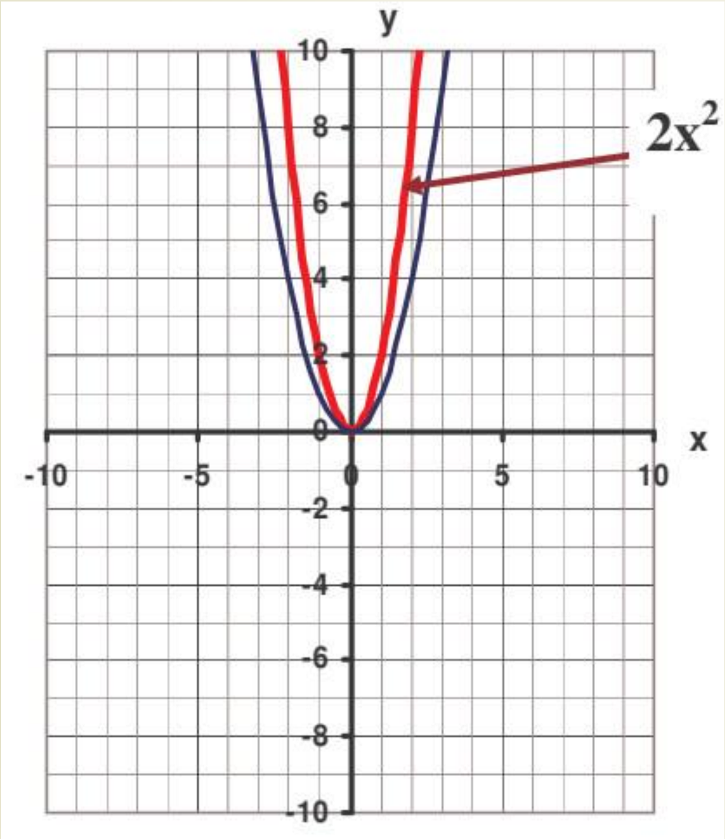


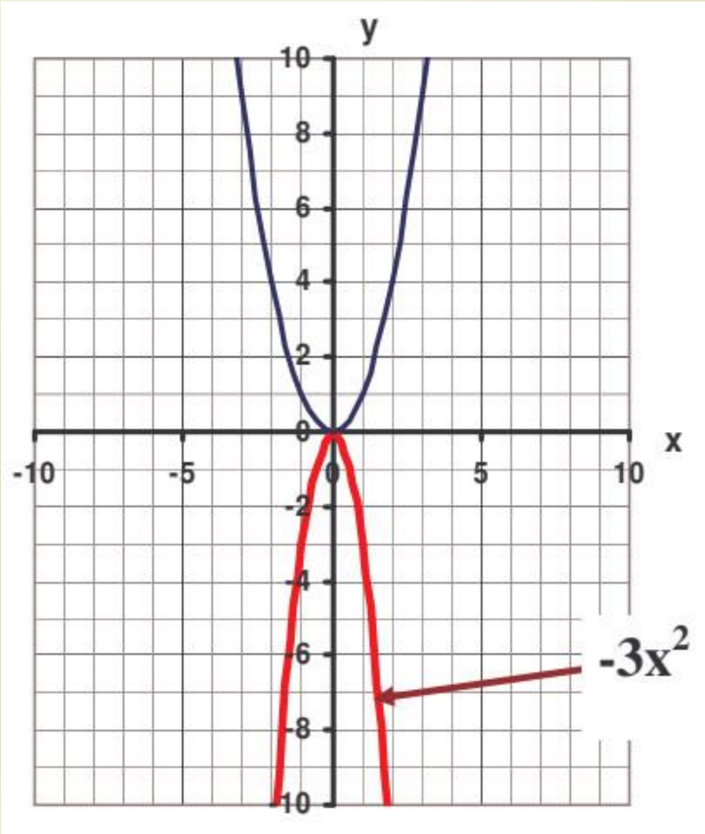


2)

Az $f(x) = 2x^2$ és $f(x) = -3x^2$ függvények ábrázolása

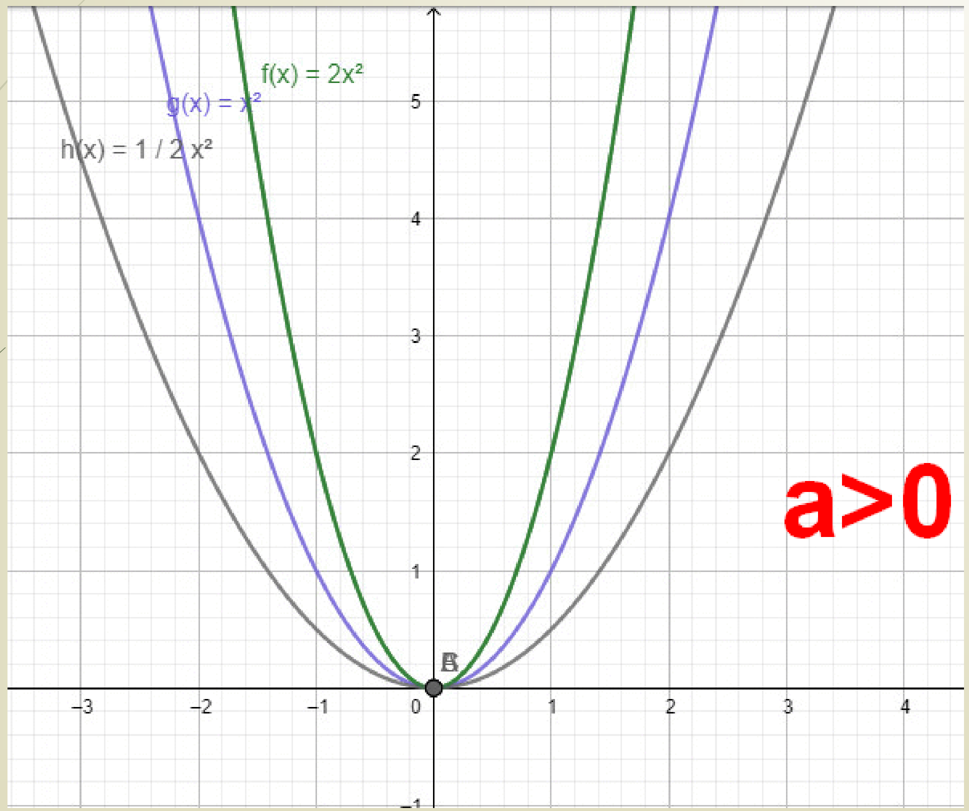
- Az ábrázoláshoz olyan értéktáblázatot készítünk, amelyben $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

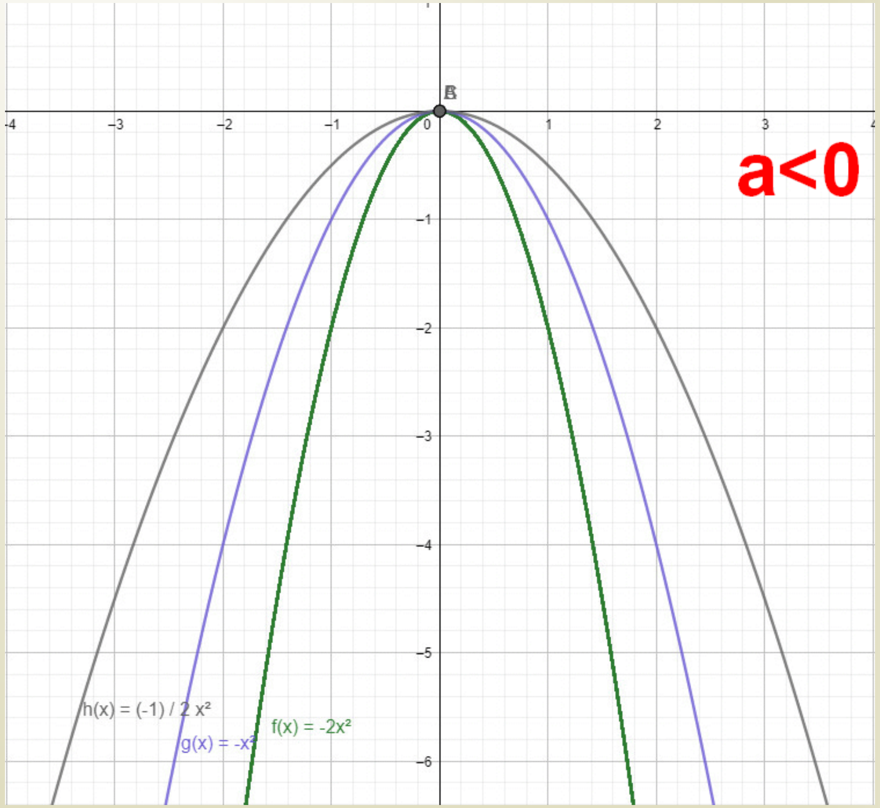




3)

Összefoglaló: az $f(x) = ax^2$ alakú függvények ábrázolása



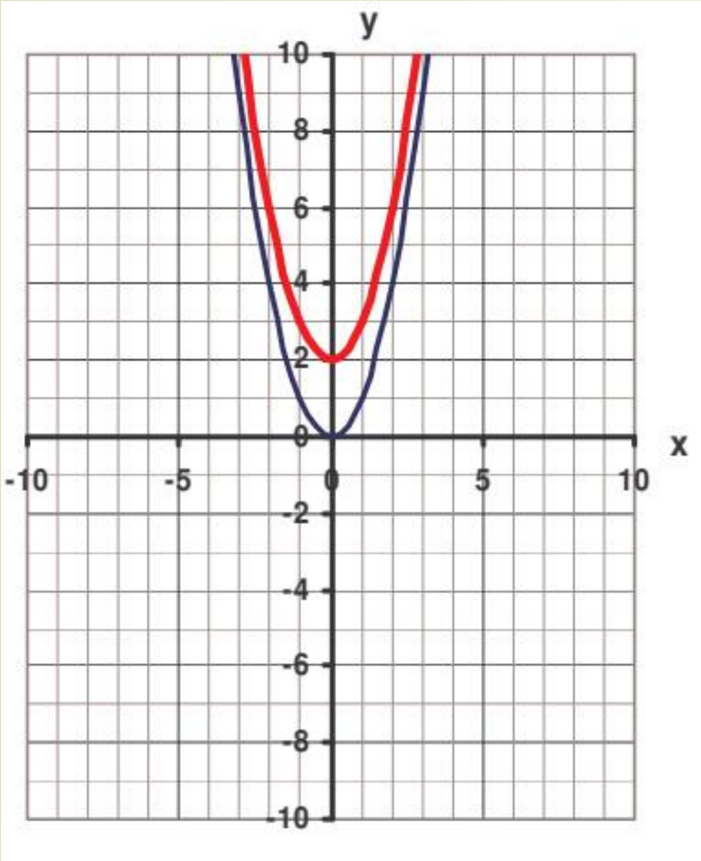


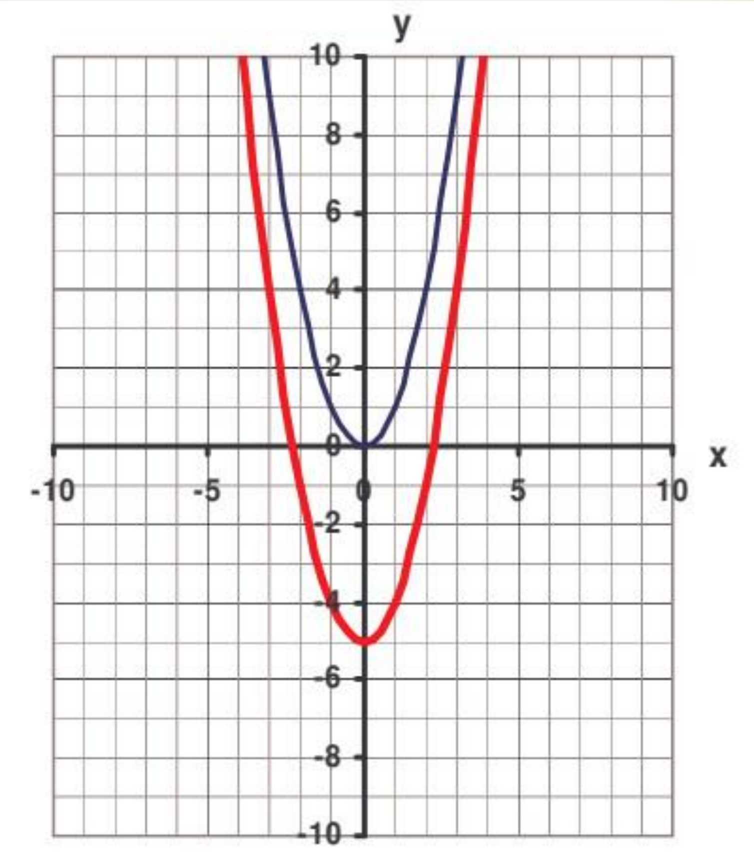
A csúcsok mindig az O(0,0) pontban vannak, a szárak felfele mutatnak ha a>0 és lefele ha a<0. A parabola meredeksége függ az a értékétől.

4)

Az $f(x)=ax^2+c$ alakú függvények ábrázolása

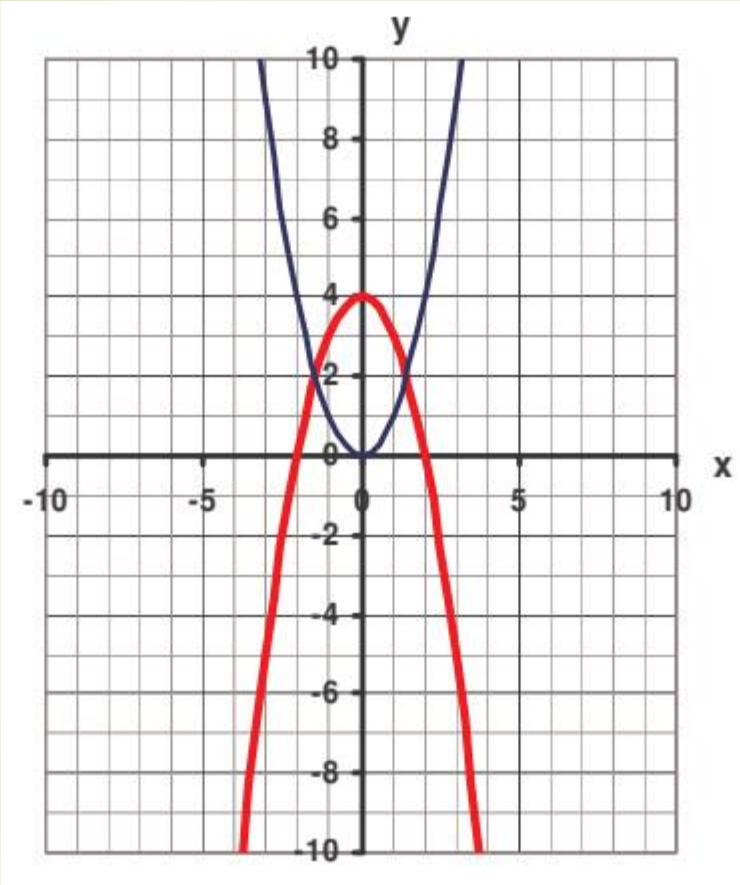
- Ábrázoljuk az $f(x)=x^2+2$ és $f(x)=x^2-5$ függvényeket
- Az ábrázoláshoz olyan értéktáblázatot készítünk, amelyben $x\in\{-2,-1,0,1,2\}$

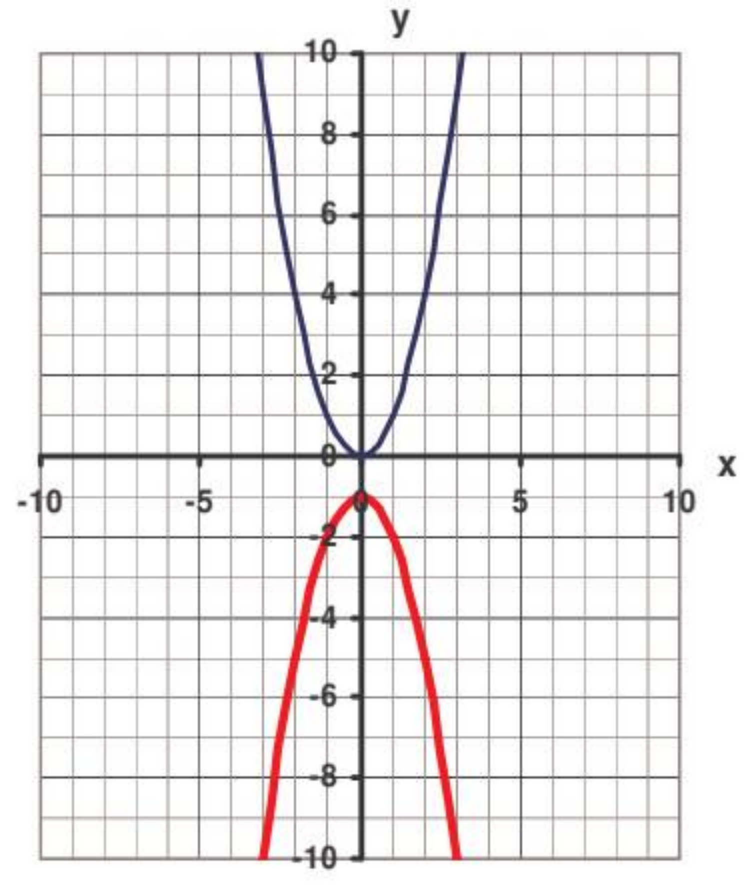




4)

- Ábrázoljuk az $f(x) = -x^2 + 4$ és $f(x) = -x^2 - 1$ függvényeket
- Az ábrázoláshoz olyan értéktáblázatot készítünk, amelyben $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$



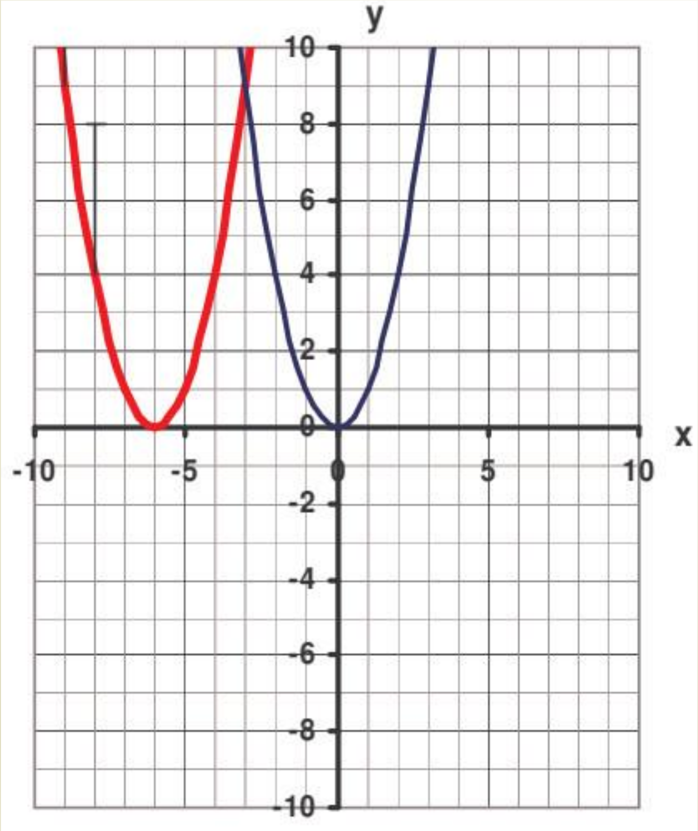


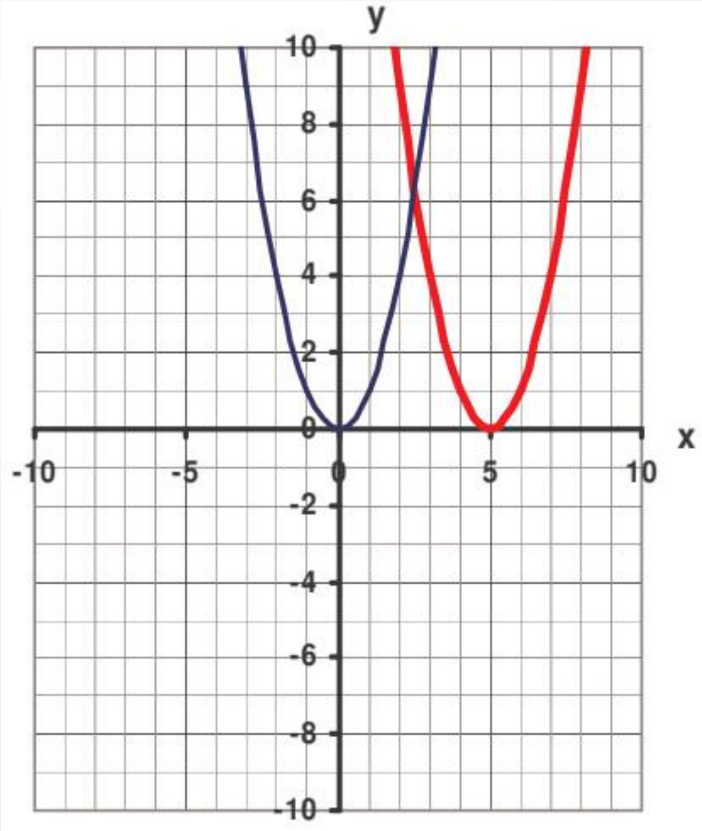
5)

Az $f(x) = (x-u)^2$ alakú függvények ábrázolása

- Ábrázoljuk az $f(x) = (x+6)^2$ és $f(x) = (x-5)^2$ függvényeket
- Az ábrázoláshoz olyan értéktáblázatot készítünk, amelyben

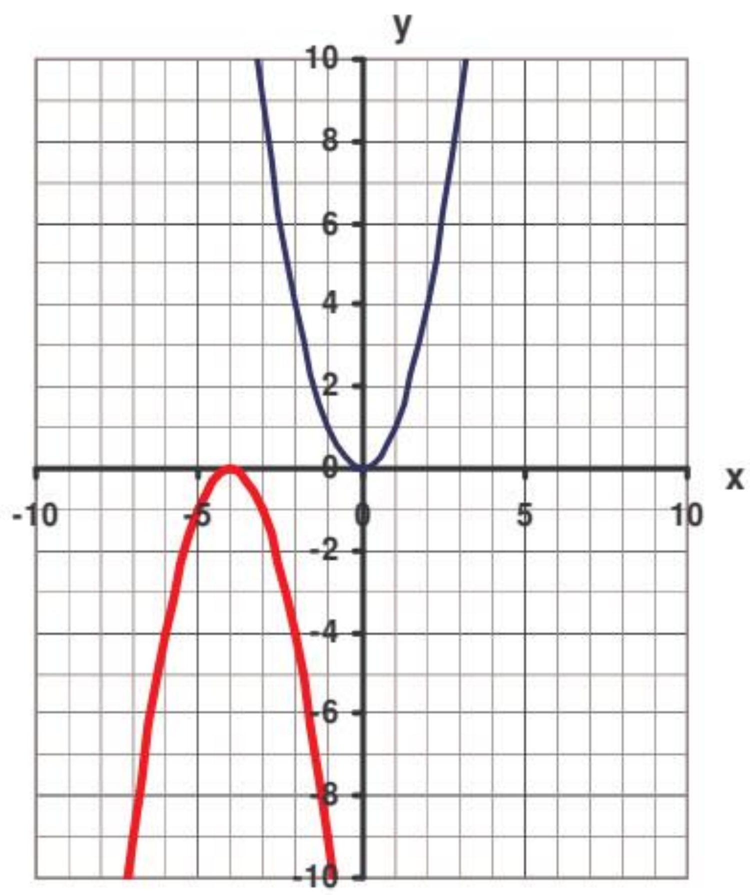
$x \in \{-8, -7, -6, -5, -4\}$ illetve $x \in \{7, 6, 5, 4, 3\}$

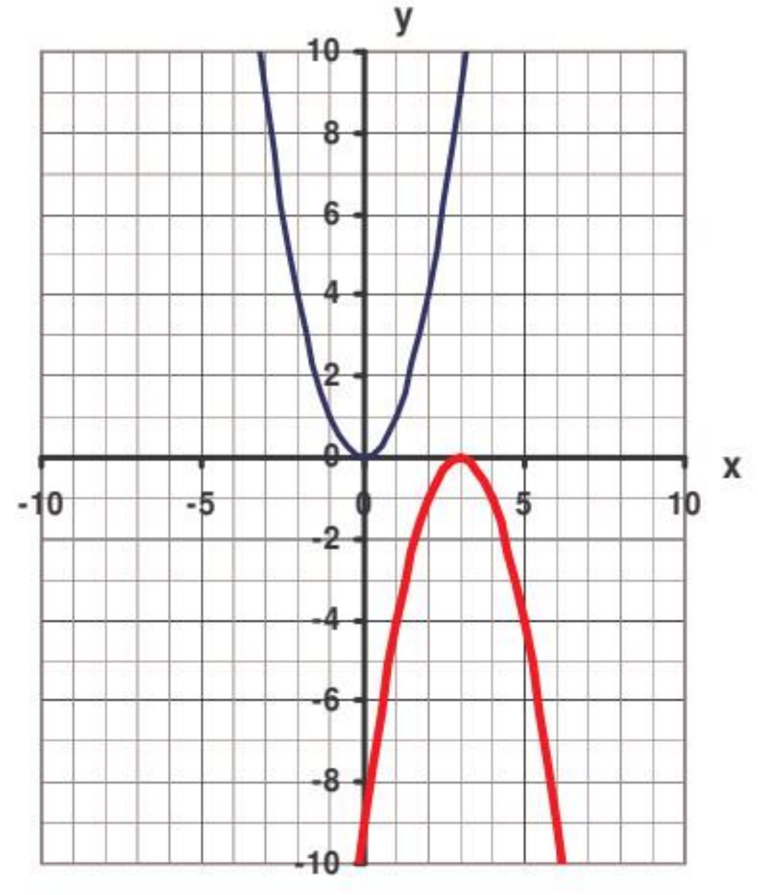




5)

- Ábrázoljuk az $f(x) = -(x+4)^2$ és $f(x) = -(x-3)^2$ függvényeket
- Az ábrázoláshoz olyan értéktáblázatot készítünk, amelyben $x \in \{-6, -5, -4, -3, -2\}$ illetve $x \in \{5, 4, 3, 2, 1\}$

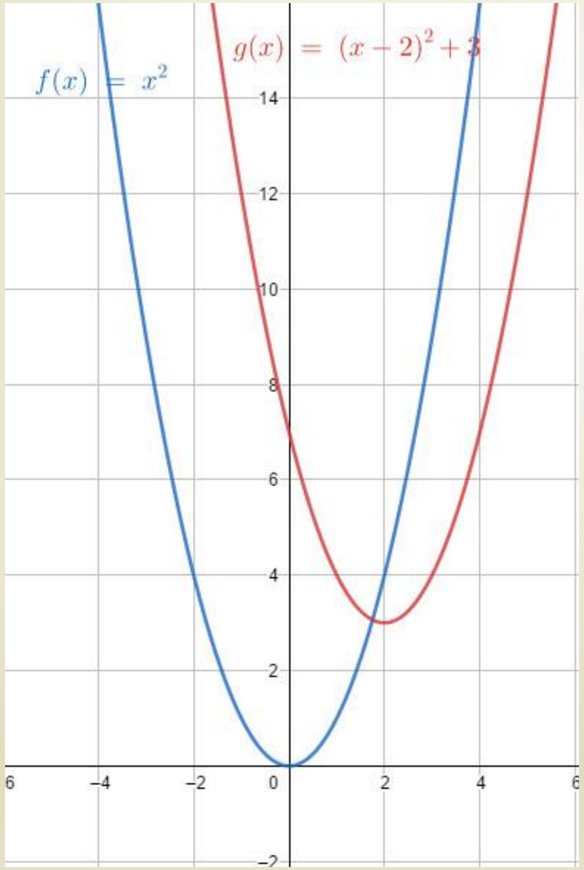


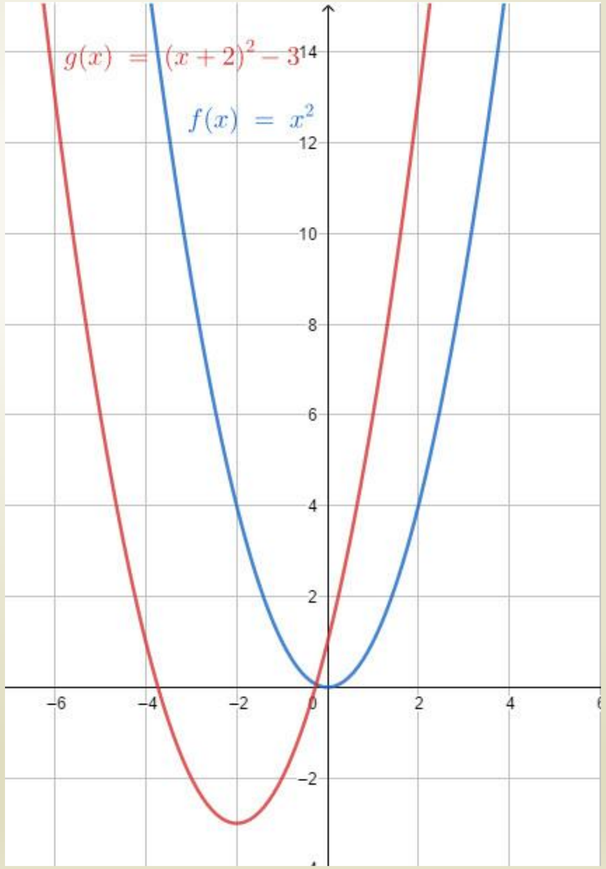


6)

Az $f(x)=(x-u)^2+v$ alakú függvények ábrázolása

Ábrázoljuk az $f(x)=(x-2)^2+3$ és $f(x)=(x+2)^2-3$ függvényeket
Az ábrázoláshoz olyan értéktáblázatot készítünk, amelyben
$x\in\{0,1,2,3,4\}$ illetve $x\in\{-4,-3,-2,-1,0\}$



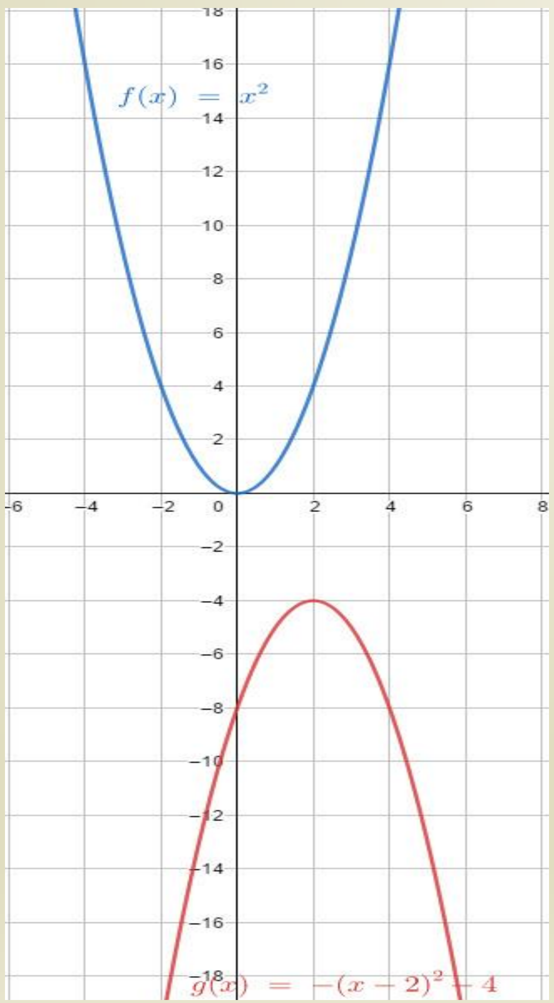


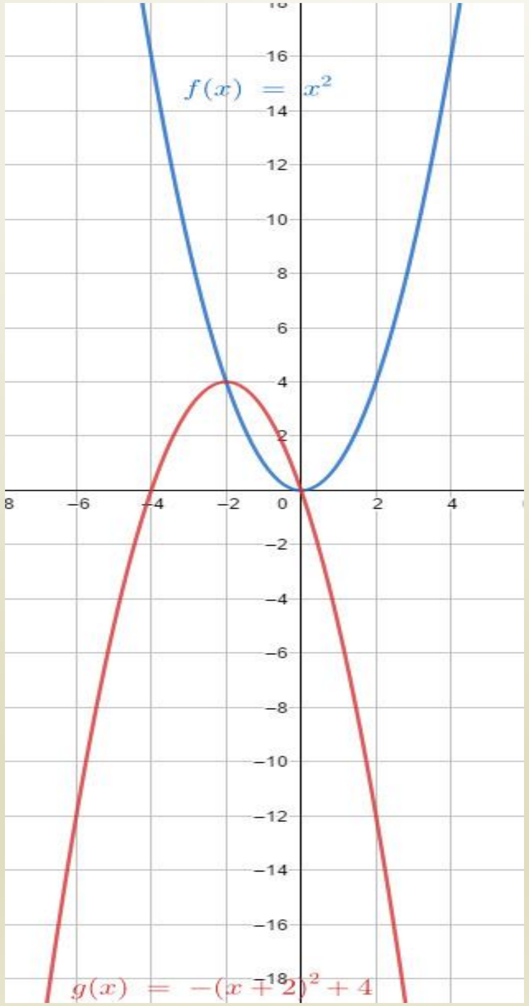
6)

Ábrázoljuk az $f(x) = -(x-2)^2 - 4$ és $f(x) = -(x+2)^2 + 4$ függvényeket

Az ábrázoláshoz olyan értéktáblázatot készítünk, amelyben

$x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ illetve $x \in \{-4, -3, -2, -1, 0\}$





7)

Az $f(x)=ax^2+bx+c$ alakú függvények ábrázolása

- Az általános másodfokú függvény a következő **kanonikus alakra** hozható:

$$\boxed{ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a}}$$

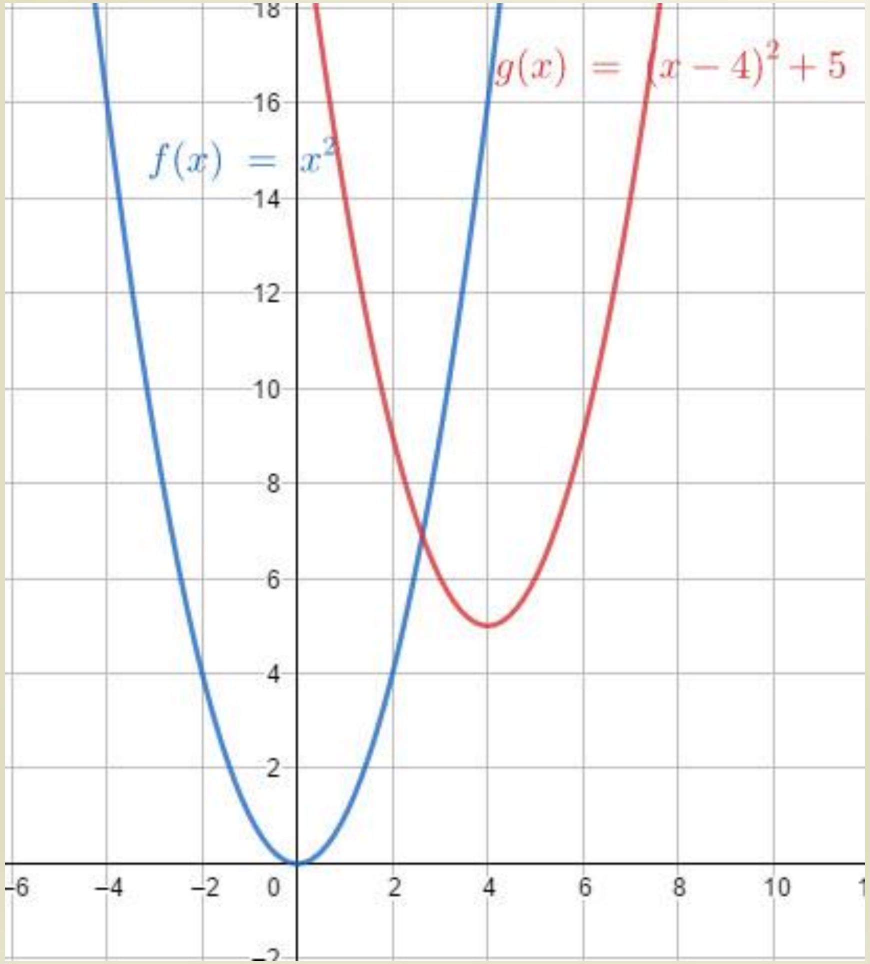
- Ez az alak tulajdonképpen az $f(x)=a(x-u)^2+v$ alak, amit a 6) részben tárgyaltunk.
- Tehát, az általános alakú másodfokú egyenlet ábrázolása céljából, a másodfokú függvényt **kanonikus alakra** kell hozzuk.

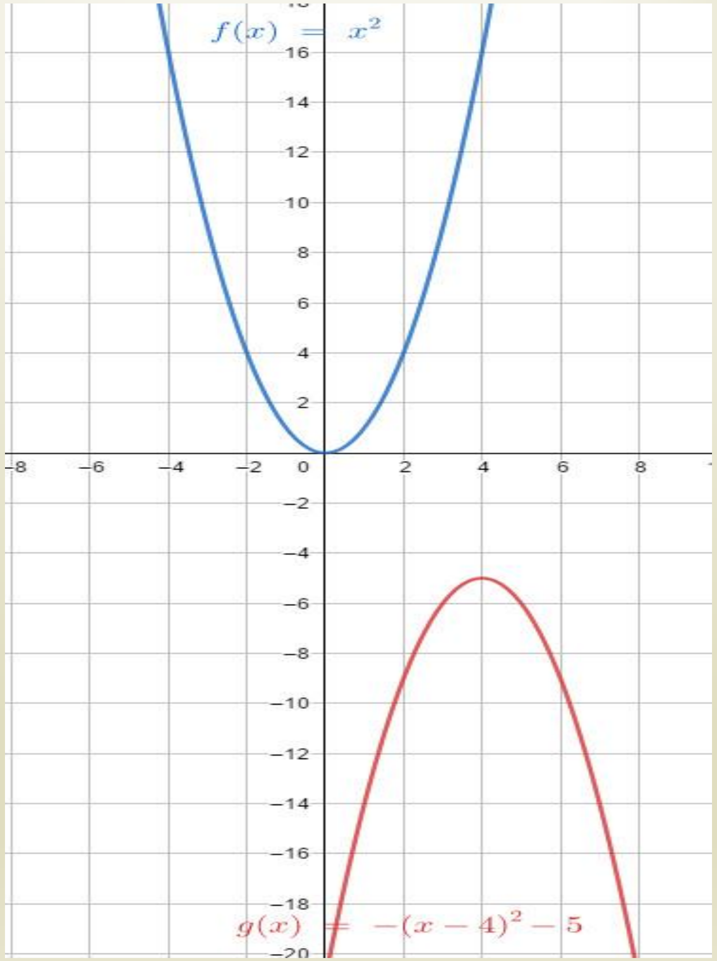
7)

Ábrázoljuk az $f(x)=x^2-8x+21$ és $f(x)=-x^2+8x-21$ függvényeket

Felírhatók: $x^2-8x+21=(x-4)^2+5$ és $-x^2+8x-21=-(x-4)^2-5$

Az ábrázoláshoz olyan értéktáblázatot készítünk, amelyben $x\in\{2,3,4,5,6\}$





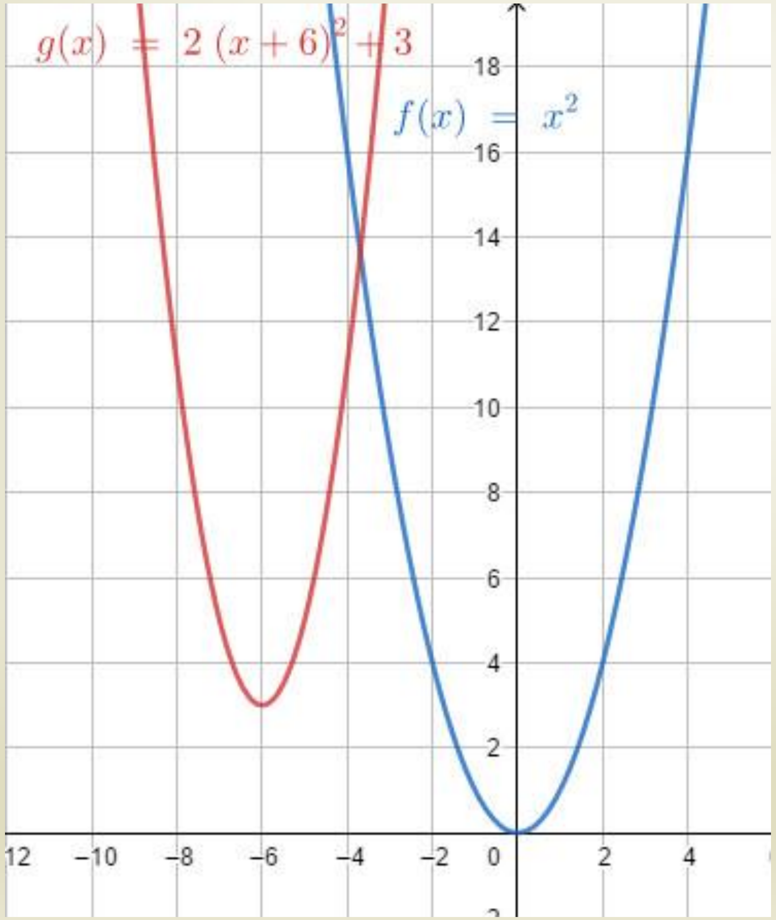
7)

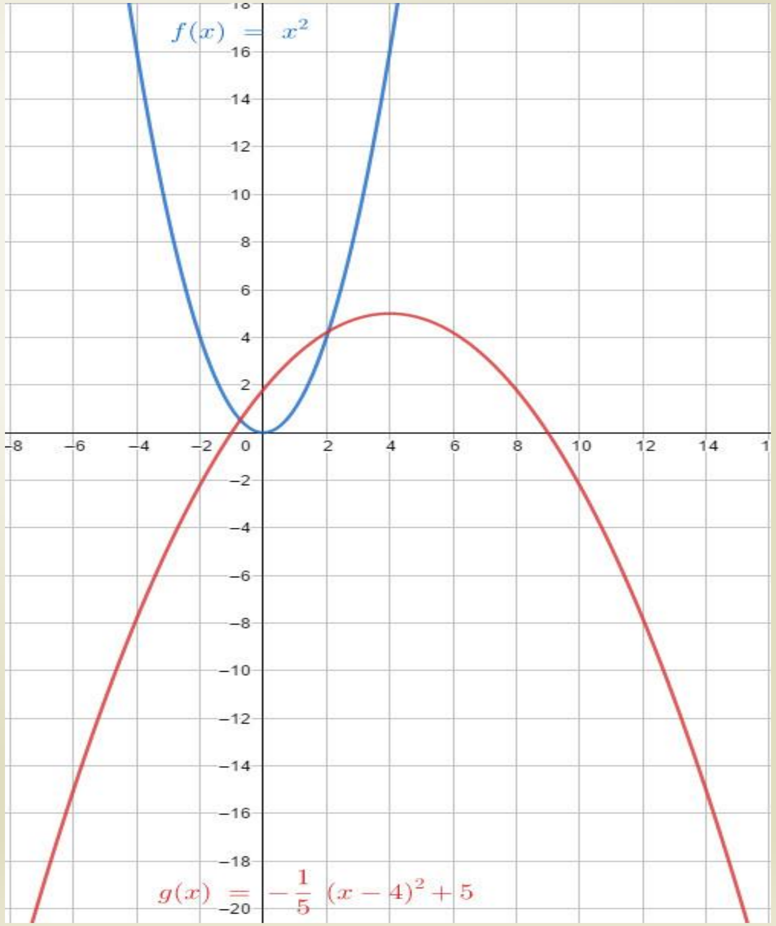
Ábrázoljuk az $f(x)=2x^2+24x+75$ és $f(x)=-\frac{1}{5}x^2+\frac{8}{5}x+\frac{9}{5}$ függvényeket

Felírhatók: $2x^2+24x+75=2(x+6)^2+3$ és $-\frac{1}{5}x^2+\frac{8}{5}x+\frac{9}{5}=-\frac{1}{5}(x-4)^2+5$

Az ábrázoláshoz olyan értéktáblázatot készítünk amelyekben

$x\in\{-8,-7,-6,-5,-4\}$ $x\in\{2,3,4,5,6\}$



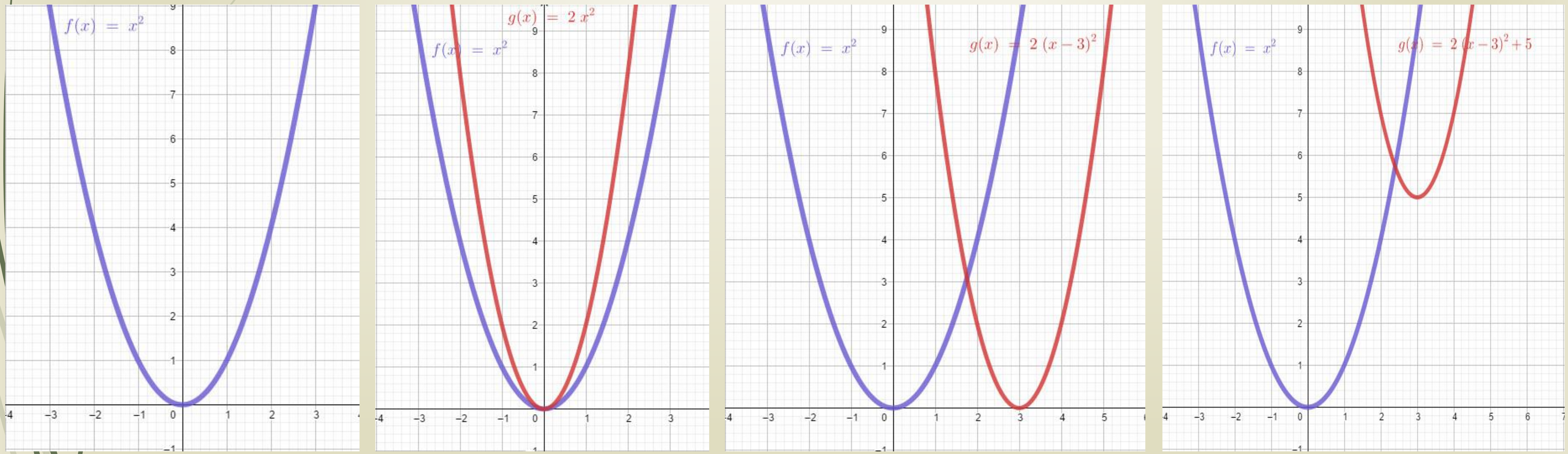


Összefoglaló az $f(x) = ax^2 + bx + c$ függvény ábrázolásához:

- 1) Ha a>0 akkor a parabola szárai felfele mutatnak, ha a<0 akkor lefele.
- A függvényt $f(x) = a(x-u)^2 + v$ kannnikus alakra hozzuk!
- Ábrázoljuk az $f(x) = x^2$ alapfüggvényt.
- Az alapfüggvény minden pontját megszorozzuk az a-val (nyitjuk illetve zárjuk az alapfüggvény szárai közötti távolságot aszerint, hogy a<1 illetve a>1).
- Az előző függvényt eltoljuk az x mentén u-val, balra ha u<0, jobbra ha u>0.
- Az előző függvényt az y tengely mentén felfele illetve lefele eltoljuk, aszerint, hogy v>0 illetve v<0.

Mintapélda

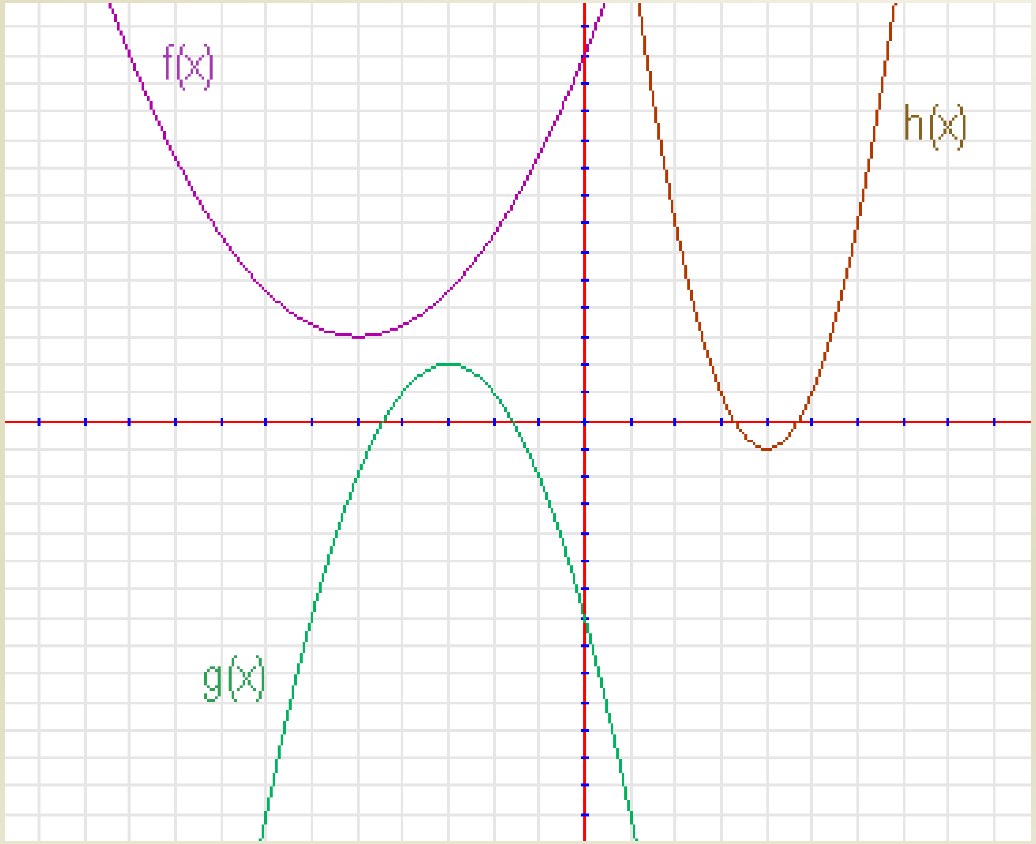
- A leírtak alapján az ábrázolás a következő lépésekben megy végbe:



Az ábrán az $f(x) = 2x^2 - 12x + 23 = 2(x-3)^2 + 5$ függvényt ábrázoltuk lépésről lépésre!

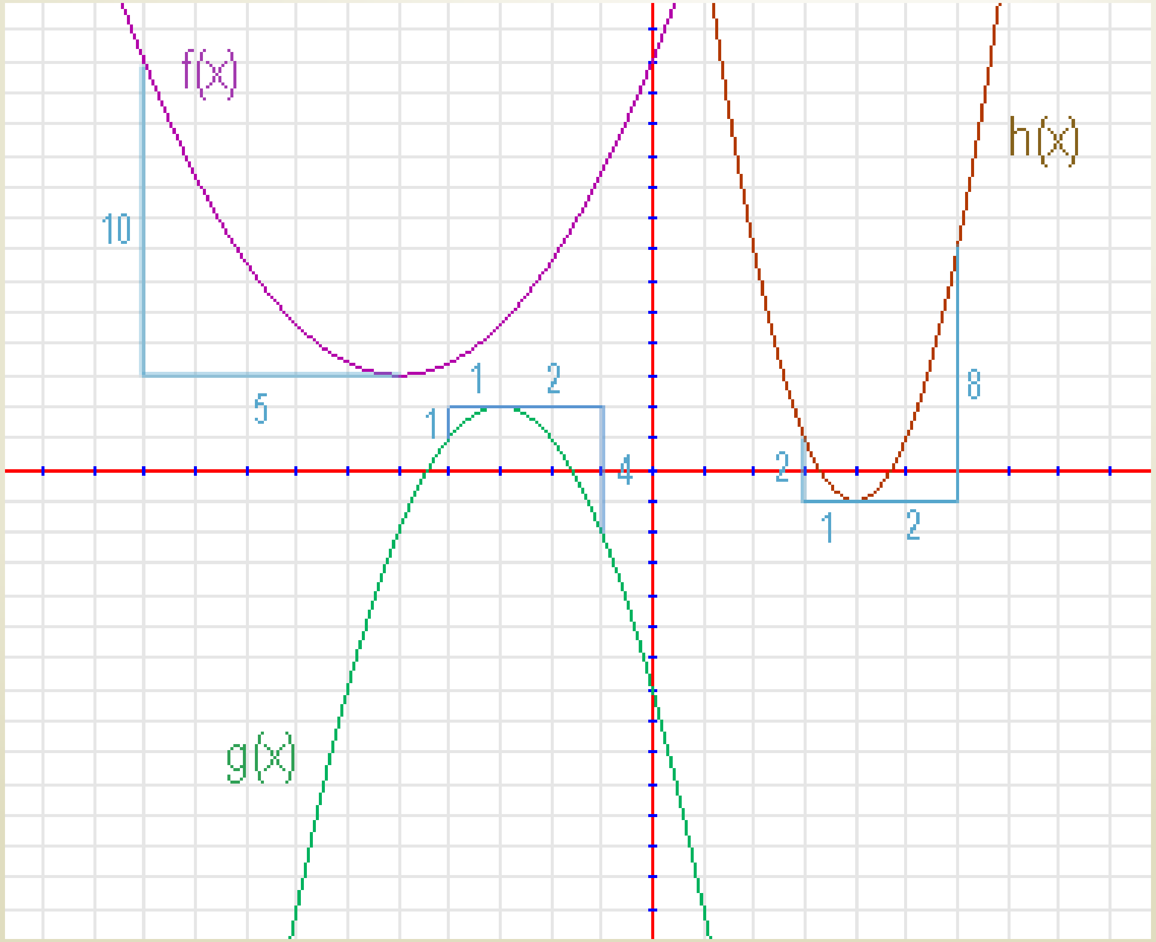
Megoldott feladat

Milyen másodfokú függvények grafikonjai láthatók az alábbi ábrán? Adjuk meg a másodfokú függvények egyenletét!



- Megállapítjuk, hogy történt-e eltolás vízszintesen: u=?
- Megállapítjuk, hogy történt-e eltolás függőlegesen: v=?
- Megállapítjuk a parabolák csúcsainak a koordinátáit
- Megállapítjuk, hogy történt-e tükrözés (a<0 igaz-e?)
- Megállapítjuk, hogy hogy történt-e nyújtás vagy zömítés (a>1 vagy a<1 ?)
- Felírjuk a függvény egyenletét: $f(x) = a(x-u)^2 + v$

Megoldott feladat



A csúcsok f: (-5,3); g: (4,-1); h: (-3,2) tehát: $f(x)=a(x+5)^3+3$ $g(x)=a(x-5)^3-1$ $h(x)=a(x+3)^3+2$

Megoldott feladat

- Csak a g függvény esetén igaz, hogy a<0, a többinél a>0.
- Ha a függvény grafikonjának az alakja megegyezik az alapfüggvény grafikonjának alakjával, akkor pl.
- 1-t jobbra (vagy balra) lépve 1-t lépünk felfelé (vagy lefelé) a grafikonig;
- 2-t jobbra (vagy balra) lépve 4-t lépünk felfelé (vagy lefelé) a grafikonig;
- 5-t jobbra (vagy balra) lépve 25-t lépünk felfelé (vagy lefelé) a grafikonig;

- A g függvény grafikonjának alakja megegyezik az alapfüggvény grafikonjának alakjával, tehát **|a| = 1**.

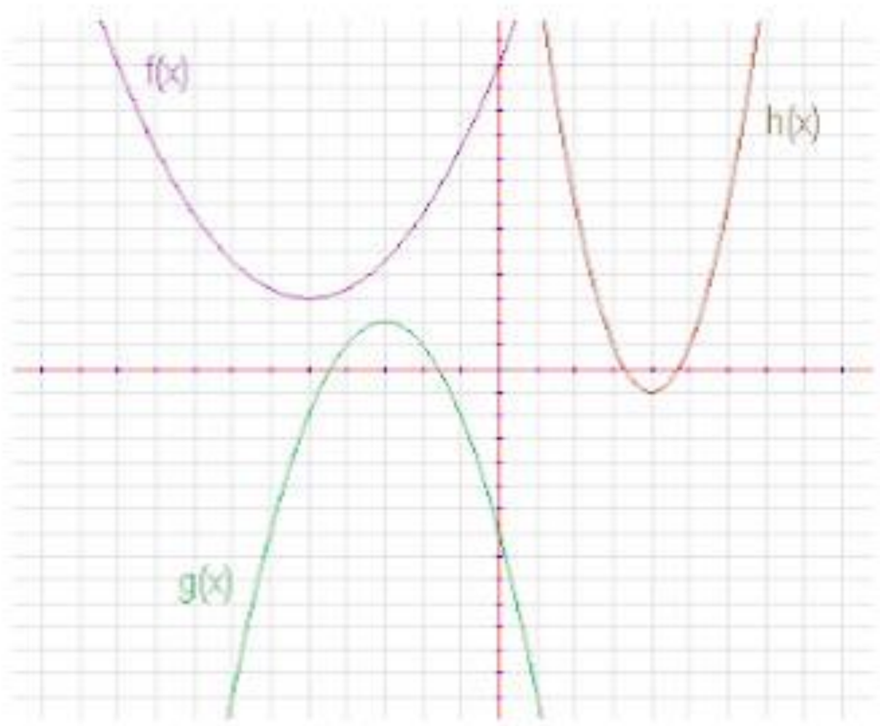
  Az h függvény grafikonjának alakja nem egyezik meg az alapfüggvény grafikonjának alakjával, 1-t balra lépve nem 1-t, hanem 2-t kell felfelé lépni (vagy 2-t jobbra lépve nem 4-t, hanem 8-t kell felfelé lépni). Mivel kétszer annyit kell lépni, ezért 2-szeresére van nyújtva. Tehát **|a| = 2**.

  A f függvény grafikonjának alakja szintén nem egyezik meg az alapfüggvény grafikonjának alakjával, 5-t balra lépve nem 25-t, hanem 10-t kell felfelé lépni.
  Mivel 10/25 = 0,4-szeresét kell lépni, ezért 0,4-dére van zömítve. Tehát **|a| = 0,4.**

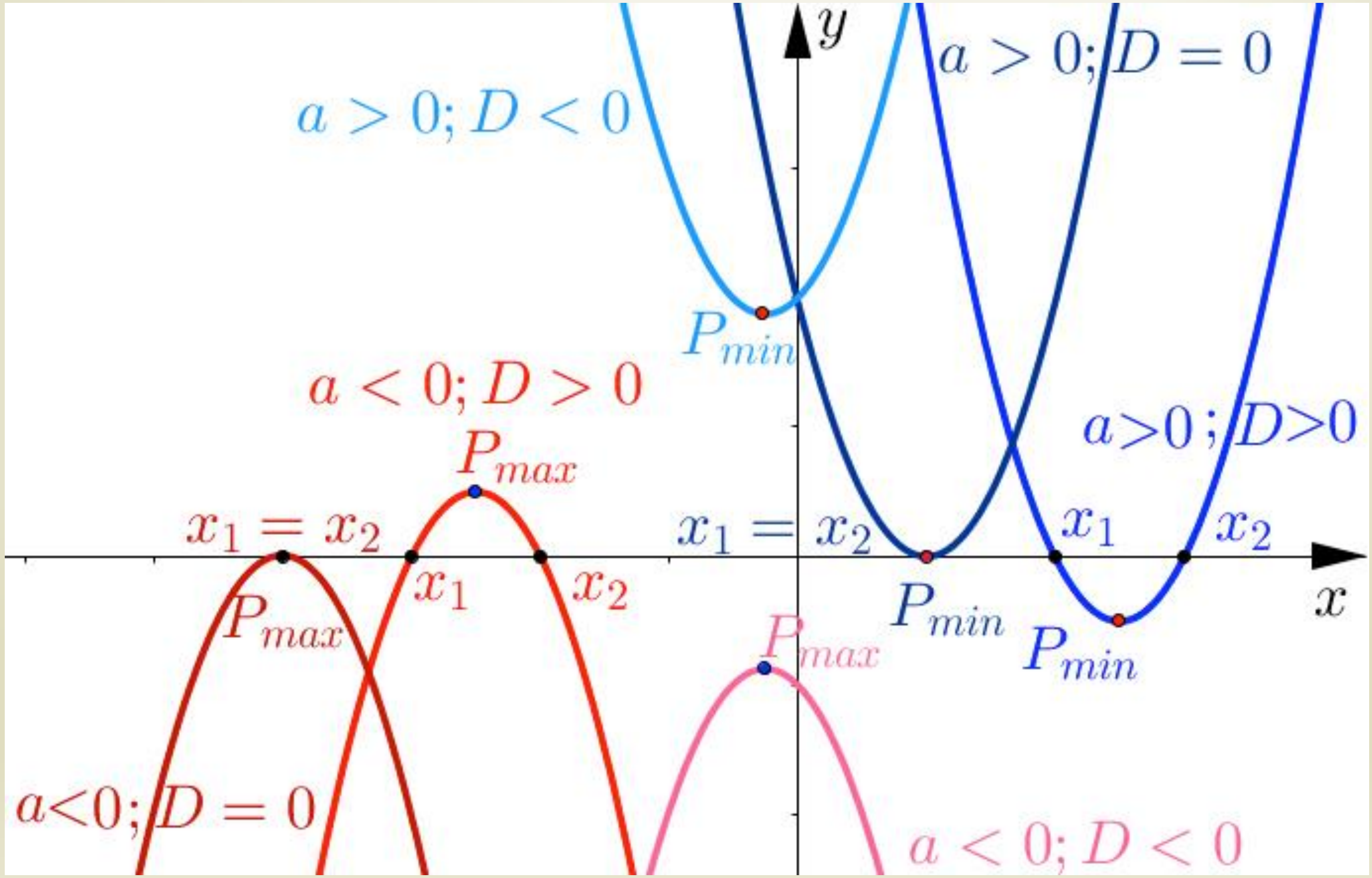
Megoldott feladat

Összefoglaló:

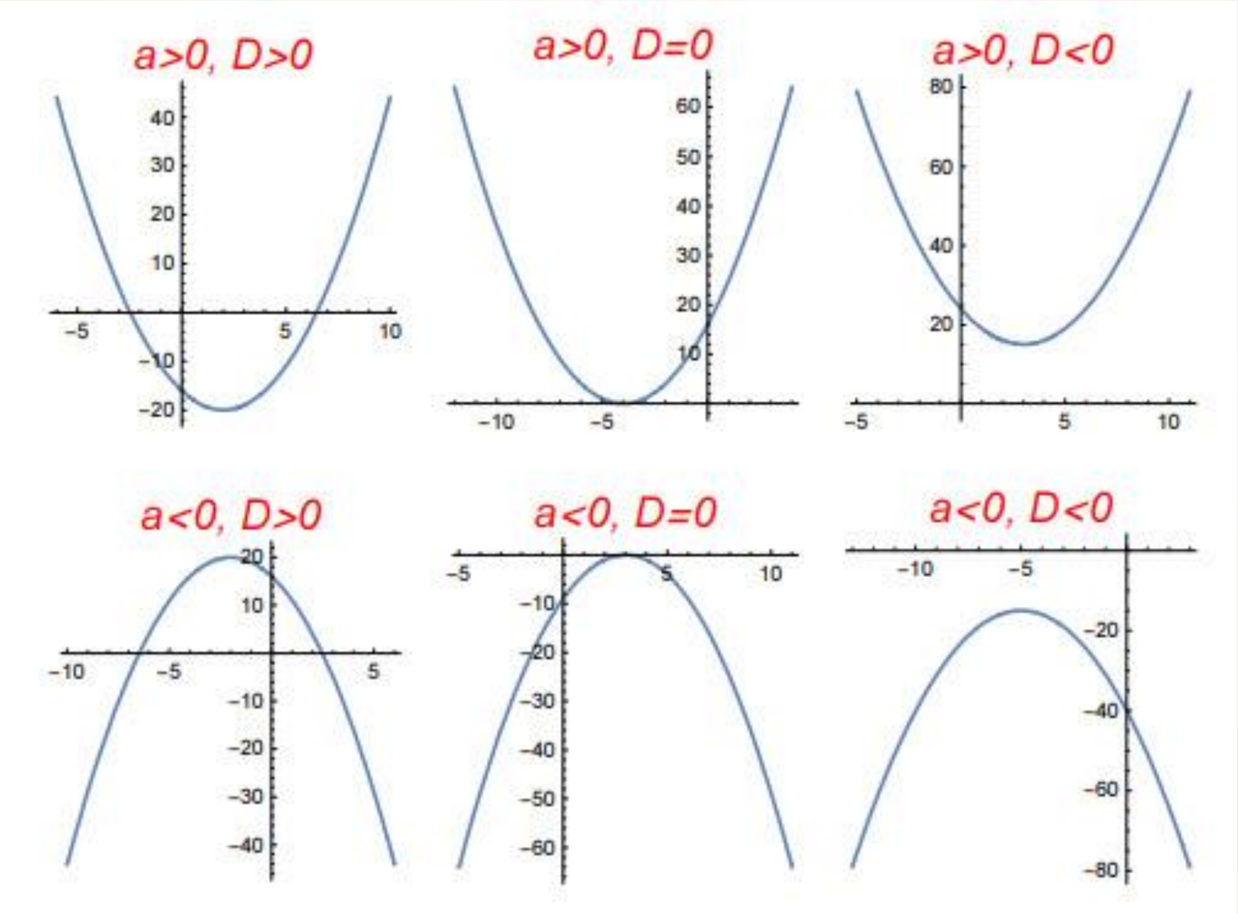
	f(x)	h(x)	g(x)
a =	0,4	2	-1
u =	-5	4	-3
v =	3	-1	-2
	$f(x) = 0{,}4(x + 5)^2 + 3$	$h(x) = 2(x-4)^2 - 1$	$g(x) = -(x + 3)^2 + 2$



A parabola helyzete a diszkrimináns szerint:



A parabola lehetséges 6 helyzete:



Gyakorló feladatok

1) $f(x)=x^2-2$

2) $f(x)=-x^2+2$

3) $f(x)=-3x^2-2$

4) $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2$

5) $f(x)=(x-2)^2$

6) $f(x)=-(x+2)^2$

7) $f(x)=2(x-2)^2$

8) $f(x)=-\frac{1}{2}(x+2)^2$

9) $f(x)=(x-2)^2+1$

10) $f(x)=-(x+2)^2-1$

11) $f(x)=2(x-2)^2+1$

12) $f(x)=-\frac{1}{2}(x+2)^2-1$

13) $f(x)=x^2-2x+3$

14) $f(x)=-x^2-2x-2$

15) $f(x)=2x^2-4x+3$

16) $f(x)=-2x^2-4x-1$

Megoldottam!

Köszönöm a figyelmet!