Micimackó meséje a VIII.-IX. osztályosoknak!
1. Lecke

A másodfokú egyenlet megoldása

- Készítette: Tuzson Zoltán, tanár

A másodfokú egyenlet **általános** alakja:

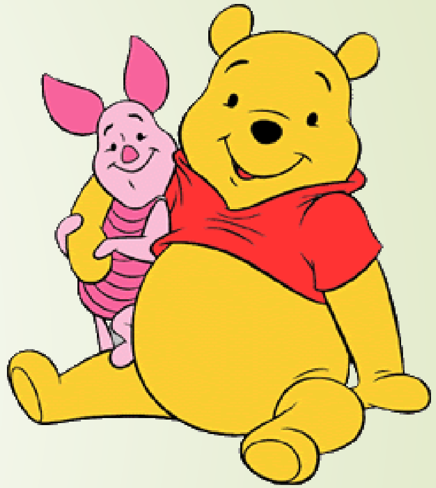
$$ax^2 + bx + c = 0$$

ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$ és $a \neq 0$

együtthatók

$a =$ főegyüttható $\qquad c =$ szabadtag

Sajátos másodfokú egyenlet:



Első típusú egyenlet:

1) Ha $c = 0$ akkor $ax^2 + bx = 0$

Második típusú egyenlet:

2) Ha $b = 0$ akkor $ax^2 + c = 0$

Például: $2x^2 - 3x = 0$ első típusú hiányos másodfokú egyenlet

$2x^2 + 1 = 0$ második típusú hiányos másodfokú egyenlet

Az első típusú $ax^2+bx=0$ hiányos másodfokú egyenlet megoldása

$$ax^2+bx=0 \Leftrightarrow x(ax+b)=0 \qquad (*)$$

Egy $a \cdot b = 0$ szorzat akkor nulla, ha valamelyik szorzótényezője nulla, vagyis $a=0$ vagy $b=0$

Tehát $(*) \Rightarrow$ $x_1=0$ vagy $ax+b=0$ ahonnan $x_2=-\frac{b}{a}$

<u>Megjegyzés</u>: ennek a típusú másodfokú egyenletnek az egyik gyöke **<u>mindig nulla</u>**: $x_1=0$

1. *példa*

Oldjuk meg a $2x^2 - 3x = 0$ egyenletet!

<u>Megoldás:</u>

Kiemeljük az x-et:

$$2x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(2x - 3) = 0$$

Tehát $x_1 = 0$ vagy $2x - 3 = 0$ ahonnan $x_2 = \frac{3}{2}$

A második típusú $ax^2+c=0$ hiányos másodfokú egyenlet megoldása

$$ax^2+c=0 \Leftrightarrow ax^2=-c \Leftrightarrow x^2=-\frac{c}{a} \qquad (*)$$

1) Ha $-\frac{c}{a}<0$ akkor mivel $x^2\geq 0$ és $-\frac{c}{a}<0$ ezért $x^2=-\frac{c}{a}$ nem lehetséges,

Tehát az egyenletnek NINCS megoldása a valós számok halmazán.

2) Ha $-\frac{c}{a}<0$ akkor $x^2=-\frac{c}{a} \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$

Tehát az egyenletnek a megoldásai: $x_1=\sqrt{-\frac{c}{a}}$, $x_2=-\sqrt{-\frac{c}{a}}$

2. *példa*

Oldjuk meg a $2x^2+1=0$ egyenletet!

Megoldás:

$$2x^2+1=0 \Leftrightarrow 2x^2=-1 \Leftrightarrow x^2=-\frac{1}{2}$$

De a baloldalon $x^2 \geq 0$ a jobboldalon pedig $-\frac{1}{2}<0$ ezért az egyenlőség nem állhat fenn.

Tehát az egyenletnek nincs valós megoldása, vagyis

$$x \in \varnothing$$

3. *példa*

Oldjuk meg a $4x^2-9=0$ egyenletet!

<u>Megoldás:</u>

$$4x^2-9=0 \Leftrightarrow 4x^2=9 \Leftrightarrow x^2=\frac{9}{4}$$

Tehát $x^2=\frac{9}{4} \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{9}{4}} \Leftrightarrow x_{1,2}=\pm\frac{3}{2}$

Ezért az egyenlet megoldásai:

$$x_1=\frac{3}{2},\ x_2=-\frac{3}{2}$$

Az általános $ax^2+bx+c=0$ másodfokú egyenlet megoldása

Az általános másodfokú egyenlet megoldóképlete:

$$\boxed{x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}}$$ ahol $$\boxed{\Delta=b^2-4ac}$$

1) Ha $\Delta>0$ akkor 2 különböző valós megoldás van: $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ és $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

2) Ha $\Delta=0$ akkor 2 egyforma valós megoldás van: $x_1=x_2=\frac{-b}{2a}$

3) Ha $\Delta<0$ akkor NINCSEN valós megoldás.

Az $ax^2+bx+c=0$ másodfokú egyenlet megoldásának a lépései

1) Kiolvassuk az együtthatókat: $a=?,\ b=?,\ c=?$

2) Kiszámoljuk a diszkriminánst: $\Delta=b^2-4ac$

3) Ha $\Delta<0$ akkor nincs valós megoldás, vagyis $x\in\varnothing$

4) Ha $\Delta=0$ akkor két egyforma megoldás van: $x_1=x_2=-\frac{b}{a}$

5) Ha $\Delta>0$ akkor két különböző valós megoldás van: $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

4. *példa*

Oldjuk meg a $2x^2 + x - 1 = 0$ egyenletet!

<u>Megoldás:</u>

Leolvassuk az együtthatókat: $a = 2,\ b = 1,\ c = -1$

Kiszámoljuk a diszkriminánst: $\Delta = 1 + 8 = 9 > 0$

Felírjuk a megoldóképletet: $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \dfrac{-1 \pm 3}{2}$

Tehát a megoldások: $x_1 = \dfrac{-1+3}{2} = 1,\ x_1 = \dfrac{-1-3}{2} = -2$

5. *példa*

Oldjuk meg a $2x^2 + x + 1 = 0$ egyenletet!

<u>Megoldás:</u>

Leolvassuk az együtthatókat: $a = 2,\ b = 1,\ c = 1$

Kiszámoljuk a diszkriminánst: $\Delta = 1 - 8 = -7 < 0$

Tehát nincs megoldás, vagyis $x \in \varnothing$

5. *példa*

Oldjuk meg a $4x^2-4x+1=0$ egyenletet!

<u>Megoldás:</u>

Leolvassuk az együtthatókat: $a=4,\ b=-4,\ c=1$

Kiszámoljuk a diszkriminánst: $\Delta=16-16=0$

Tehát a megoldás $x_1=x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{-4}{8}=\frac{1}{2}$

Kitűzött feladatok

- Oldjuk meg a következő másodfokú egyenleteket:

1) $x^2+2x-3=0$

2) $2x^2+x-1=0$

3) $-x^2+x+2=0$

4) $-3x^2+2x+1=0$

5) $x^2+2x+1=0$

6) $4x^2+4x+1=0$

7) $-x^2+6x-9=0$

8) $-4x^2+4x-1=0$

9) $x^2+x+1=0$

10) $2x^2+2x+1=0$

11) $-x^2+6x+9=0$

12) $-2x^2+2x-1=0$

13) $f(x)=x^2+2x$

14) $f(x)=2x^2-1$

15) $f(x)=-x^2-2$

16) $f(x)=-3x^2+2x$

17) $x^2+1=0$

18) $4x^2+4x=0$

19) $-x^2+6x=0$

20) $-4x^2-1=0$

21) $x^2+x=0$

22) $2x^2+1=0$

23) $-x^2+6x=0$

24) $-2x^2-1=0$

Megoldottam!

Köszönöm a figyelmet!