Micimackó meséje a IX. osztályosoknak!

A másodfokú függvény kanonikus alakja

- Készítette: Tuzson Zoltán, tanár

Mit is jelent a kanonikus alak, és mire jó?

A továbbiakban ezekre a kérdésekre adunk választ!

Ismert, hogy a másodfokú függvény a következő alakú:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Ahol a, b, c együtthatók, x pedig a független változó.

Felmerül az a probléma, hogy alakítsuk át a másodfokú függvényt, hogy az teljes négyzet, és még valamilyen szám legyen, tehát a változót csak egyetlen kifejezésben tartalmazza, vagyis $f(x) = a(x-u)^2 + v$ alakba .

A kanonikus alakra hozás lépésekben

- 1) Adott tehát az $f(x) = ax^2 + bx + c$ függvény
- 2) Emeljük ki erőltetett tényezőnek az „a" együtthatót, ezt kapjuk:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

- 3) A zárójelben alakítsunk ki teljes négyzetet úgy, hogy használjuk fel az első két tagot:

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)$$

- 4) Különítsük el a teljes négyzetet:

$$a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{2a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}$$

- 5) Ezt az alakot nevezzük kanonikus alaknak, tehát:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}}$$

Mintapélda

- 1) Hozzuk kanonikus alakra az $f(x) = 3x^2 + x - 2$ függvényt!
- 2) Emeljük ki erőltetett tényezőnek az „a" együtthatót, ezt kapjuk:

$$3x^2 + x - 2 = 3\left(x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\right)$$

- 3) A zárójelben alakítsunk ki teljes négyzetet úgy, hogy használjuk fel az első két tagot:

$$3\left(x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\right) = 3\left(x^2 + 2\frac{1}{6}x + \frac{1}{36} - \frac{2}{3} - \frac{1}{36}\right)$$

- 4) Különítsük el a teljes négyzetet:

$$3\left(x^2 + 2\frac{1}{6}x + \frac{1}{36} - \frac{2}{3} - \frac{1}{36}\right) = 3\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{25}{12}$$

- 5) Tehát a kanonikus alak a következő:

$$\boxed{3x^2 + x - 2 = 3\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{25}{12}}$$

Alternatív módszer a kanonikus alakra hozásra

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f(x) = \frac{1}{4a}\left(4a^2x^2 + 4abx + 4ac\right)$$

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = (2ax)^2 + 2(2ax)b + 4ac$$

$$(2ax)^2 + 2(2ax)b + 4ac = (2ax+b)^2 + 4ac - b^2 = (2ax+b)^2 - \Delta$$

Tehát

$$f(x) = ax^2 + bx + c = \frac{1}{4a}\left((2ax+b)^2 - \Delta\right)$$

Megfigyelhető, hogy ez az alak megegyezik az előbbiekben talált kanonikus alakkal.

Mire jó az $\boxed{ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{-\Delta}{4a}}$ kanonikus alak?

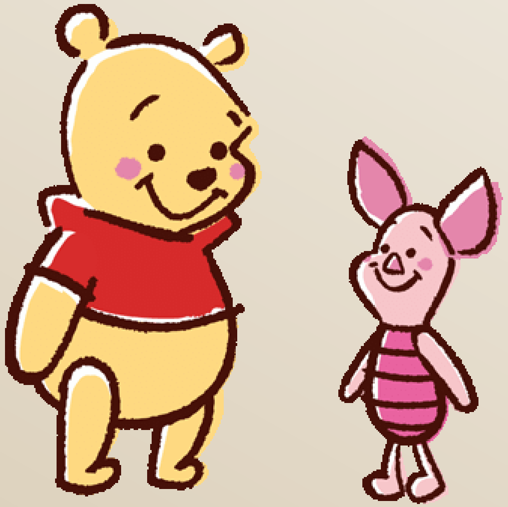
- Leghamarább a függvény szélsőértékét (minimumát vagy maximumát) határozhatjuk meg:

- Ha a>0 akkor $a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ tehát $f(x)=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{-\Delta}{4a}\geq\dfrac{-\Delta}{4a}$

  ami azt jelenti, hogy $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=-\dfrac{\Delta}{4a}$

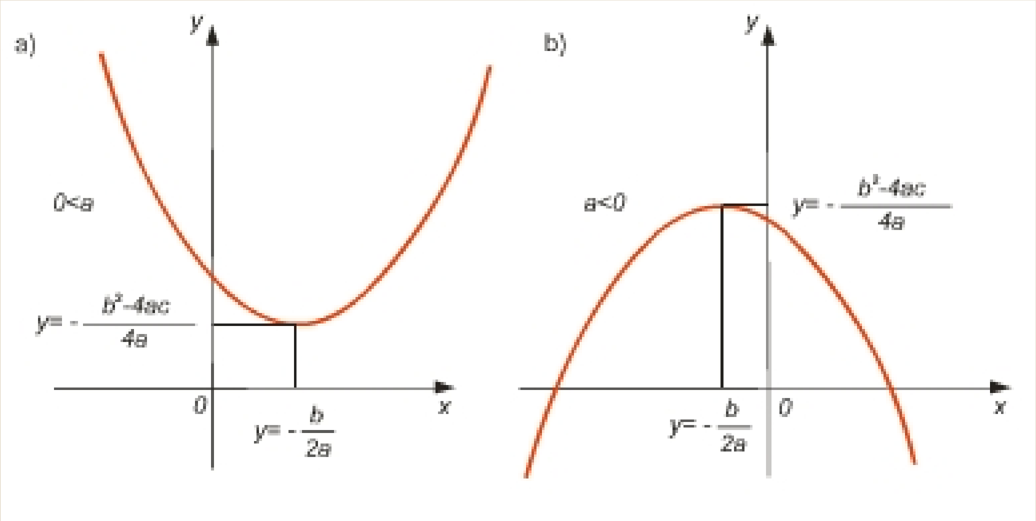
- Ha a<0 akkor $a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2\leq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ tehát $f(x)=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{-\Delta}{4a}\leq\dfrac{-\Delta}{4a}$

  ami azt jelenti, hogy $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=-\dfrac{\Delta}{4a}$



Mire jó az $\boxed{ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a}}$ kanonikus alak?

- A kanonikus alakból meghatározhatók a parabola csúcsának a koordinátái:



- A csúcs koordinátái az előbbiek alapján tehát $\boxed{V\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)}$ mert $f\left(-\frac{b}{2a}\right)=-\frac{\Delta}{4a}$

Mire jó az $\boxed{ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a}}$ kanonikus alak?

- A kanonikus alakból meghatározhatók a függvény monotonítási intervallumai:

$$x\,\Big|\,-\infty \text{ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ } -b/2a \text{ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ } +\infty$$

- Ha a>0 akkor $\quad f(x)\,\Big|\; \searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow \;\; -\Delta/4a \;\; \nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow$

$$x\,\Big|\,-\infty \text{ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ } -b/2a \text{ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ } +\infty$$

- Ha a<0 akkor $\quad f(x)\,\Big|\; \nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow \;\; -\Delta/4a \;\; \searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow$

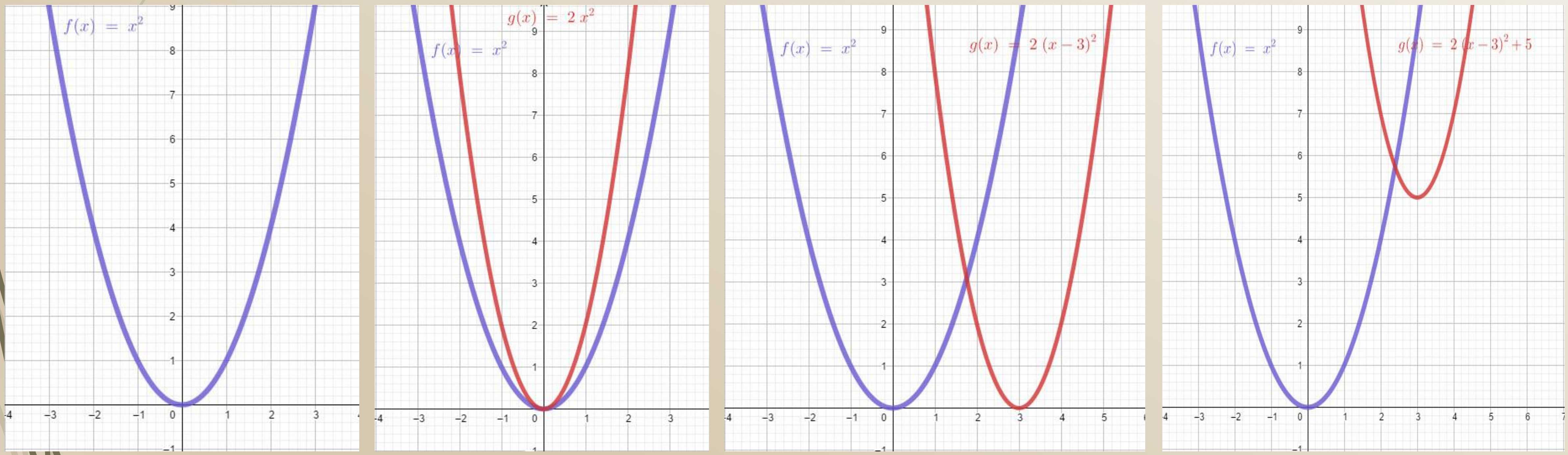
hiszen $\boxed{V\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)}$ a függvény minimum illetve maximum pontja.

Mire jó az $\boxed{ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a}}$ kanonikus alak?

- A kanonikus alakból vezethető le a másodfokú egyenlet megoldásképlete, vagyis az $ax^2+bx+c=0$ egyenletnek a megoldási képlete:
- Mivel $ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a}=0$ ezért $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}$ így, ha:
- 1) $\Delta<0$ akkor $\frac{\Delta}{4a^2}<0$ és $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\geq 0$ ezért nincs valós megoldás, vagyis $\boxed{x_{1.2}\notin\mathbb{R}}$
- 2) $\Delta=0$ akkor $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$ tehát a megoldás $\boxed{x_{1,2}=-\frac{b}{2a}}$
- 3) $\Delta>0$ akkor $x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$ vagyis $\boxed{x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}}$

Mire jó az $\boxed{ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a}}$ kanonikus alak?

- A kanonikus alak alapján, könnyen ábrázolhatók a másodfokú függvények, például: ábrázoljuk az $f(x)=2x^2-12x+23=2(x-3)^2+5$ függvényt:



- A másodfokú függvény ábrázolásáról részletesen egy másik leckében írunk!

Gyakorló feladatok I.

Hozzuk kanonikus alakra a következő függvényeket:

1) $f(x)=x^2-2x$

2) $f(x)=-x^2+4x$

3) $f(x)=2x^2-3x$

4) $f(x)=-3x^2+2x$

5) $f(x)=x^2-2x+1$

6) $f(x)=-x^2+4x-4$

7) $f(x)=2x^2-3x+\frac{9}{2}$

8) $f(x)=-3x^2+2x-\frac{1}{3}$

9) $f(x)=2x^2-3x+1$

10) $f(x)=-x^2+2x+4$

11) $f(x)=2x^2-3x+5$

12) $f(x)=-3x^2+2x+1$

13) Bontsuk fel 30-at két összeadandóra úgy, hogy négyzetösszegük minimális legyen.

Gyakorló feladatok II.

- 1) Határozzuk meg az alábbi függvények legnagyobb, illetve legkisebb értékét:

a) $f(x)=2x^2-6x-5$

b) $f(x)=3x^2+8x+10$

c) $f(x)=-4x^2+2x+7$

d) $f(x)=-6x^2-2x-1$

e) $f(x)=5x^2-20x-3$

e) $f(x)=-x^2-20x-35$

- 2) Írjuk fel az előző függvények monotonítási intervallumait!

Megoldottam!

Köszönöm a figyelmet!