Micimackó meséje IX. osztályosoknak!

A másodfokú függvénnyel és egyenlettel kapcsolatos témakörök

- Készítette: Tuzson Zoltán, tanár

Az $ax^2+bx+c=0$ egyenlet és gyökei közötti összefüggések (Viéte összefüggések)

A gyökök kiszámolása nélkül megadjuk a gyökök összegének és a szorzatának az értékét

A megoldóképlettel kiszámoljuk a gyököket: $x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Ezután felírjuk: $x_1+\ x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{b}{a}$

Továbbá felírjuk: $x_1\cdot\ x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{c}{a}$

Tehát a Viéte képletek a következők: $\boxed{x_1+x_2=-\frac{b}{a},\ x_1x_2=\frac{c}{a}}$

Alkalmazás

- Legyen x_1 és x_2 a $px^2-2x+p+1=0$ egyenlet két gyöke. Hogyan válasszuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy a gyökökre teljesüljenek az $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=-2$ összefüggések?

- <u>Megoldás:</u>

  Felírjuk a Viéte összefüggéseket: $x_1+x_2=\frac{2}{p},\ x_1x_2=\frac{p+1}{p}$

- Ezek szerint $-2=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{\frac{2}{p}}{\frac{p+1}{p}}=\frac{2}{p+1}$ tehát $\frac{2}{p+1}=-2\Rightarrow p=-2$

Két szám meghatározása ha ismert az összegük és a szorzatuk

- A továbbiakban két ismeretlen szám x_1 és x_2 továbbá tudjuk, hogy $x_1 + x_2 = S$ adott és $x_1 \cdot x_2 = P$ is adott. Melyik ez a két szám?
- Felírható, hogy $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0$ és most használjuk a

  Viéte összefüggéseket és az előző adatokat, miszerint $-\frac{b}{a} = x_1 + x_2 = S, \ \frac{c}{a} = x_1 x_2 = P$

  tehát $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ alapján $\boxed{x^2 - Sx + P = 0}$
- Most pedig a megoldóképlettel megoldjuk a kapott másodfokú egyenletet:

$$x_{1,2} = \frac{S \pm \sqrt{S^2 - 4P}}{2}$$

Alkalmazás

- Határozzuk meg azt a két számot, amelyek összege $2\sqrt{3}$ és a szorzatuk 1 !

- <u>Megoldás:</u>

- Tehát $S = x_1 + x_2 = 2\sqrt{3}$ és $P = x_1 x_2 = 1$

- Most felírjuk az $x^2 - Sx + P = 0$ másodfokú egyenletet, ami

$$x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$$

- Megoldjuk most az egyenletet, és azt kapjuk, hogy $x_{1,2} = \sqrt{3} \pm \sqrt{2}$

- Tehát a két szám: $x_1 = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ és $x_2 = \sqrt{3} + \sqrt{2}$

Alkalmazás

- Az $x^2-2x+m=0$ egyenlet gyökei x_1, x_2. Írjuk fel azt az y-ban másodfokú egyenletet, amelynek a gyökei $y_1=\frac{1}{x_1}-1,\ y_2=\frac{1}{x_2}-1$

1. Megoldás:

- Felírjuk a Viéte összefüggéseket: $S=y_1+y_2=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}-2=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}-2$ illetve

$$P=y_1y_2=\left(\frac{1}{x_1}-1\right)\left(\frac{1}{x_2}-1\right)=\frac{1}{x_1x_2}-\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)+1=\frac{1}{x_1x_2}-\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}+1$$

- Ismét felírjuk a Viéte összefüggéseket most az eredeti egyenletre:

$x_1+x_2=2,\ x_1x_2=m$ tehát $S=\frac{2}{m}-2=\frac{2(1-m)}{m}$ és $P=\frac{1}{m}-\frac{2}{m}+1=\frac{m-1}{m}$

- Tehát $y^2-Sy+P=0 \Leftrightarrow y^2+\frac{2(m-1)}{m}y+\frac{m-1}{m}=0$ vagyis

$$my^2+2(m-1)y+m-1=0$$

Alkalmazás

- Az $x^2-2x+m=0$ egyenlet gyökei x_1, x_2. Írjuk fel azt az y-ban másodfokú egyenletet, amelynek a gyökei $y_1=\frac{1}{x_1}-1,\ y_2=\frac{1}{x_2}-1$

<u>2. Megoldás:</u>

- Az $y_1=\frac{1}{x_1}-1,\ y_2=\frac{1}{x_2}-1$ összefüggések alapján azt látjuk, hogy mind a két y gyök *<u>ugyanazon transzformációnak</u>* van kitéve, ezért vezessük be az $y=\frac{1}{x}-1$ transzformációt, innen $x=\frac{1}{y+1}$ és ezt visszahelyettesítjük az eredeti

egyenletbe $\left(\frac{1}{y+1}\right)^2-2\left(\frac{1}{y+1}\right)+m=0$ adódik, és a műveletek elvégzése

után azt kapjuk, hogy $my^2+2(m-1)y+m-1=0$

Az $f(x) = ax^2 + bx + c$ másodfokú függvény felbontása szorzótényezőkre

- A Viéte összefüggések alapján láttuk, hogy $-\frac{b}{a} = x_1 + x_2 = S,\ \frac{c}{a} = x_1 x_2 = P$
- Tehát $f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$ vagyis $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2$
- Ezt a kifejezést most szorzótényezőkre bontjuk:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = x^2 - x_1 x - x_2 x + x_1 x_2 = x(x - x_1) - x_2(x - x_1) = (x - x_1)(x - x_2)$$

- Tehát $\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)}$
- Ez a képlet, a másodfokú függvény gyöktényezős (szorzótényezős) alakja.

Alkalmazás

- Hozzuk egyszerűbb alakra a következő törtkifejezést:

$$\frac{6x^2+25x+14}{8x^2+18x-35}$$

- Megoldás:

$$6x^2+25x+14=0 \Rightarrow x_1=-\frac{2}{3}, x_2=-\frac{7}{2} \Rightarrow 6x^2+25x+14=6\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{7}{2}\right)=(3x+2)(2x+7)$$

$$8x^2+18x-35=0 \Rightarrow x_1=\frac{5}{4}, x_2=-\frac{7}{2} \Rightarrow 8x^2+18x-35=8\left(x-\frac{5}{4}\right)\left(x+\frac{7}{2}\right)=(4x-5)(2x+7)$$

$$\frac{6x^2+25x+14}{8x^2+18x-35}=\frac{(3x+2)(2x+7)}{(4x-5)(2x+7)}=\frac{3x+2}{4x-5}$$

Gyakorló feladatok I.

- 1) Határozzuk meg a c értékét úgy, hogy a $4x^2 - 8x + c = 0$ egyenletnek:

  a) az egyik gyöke nulla legyen b) az egyik gyöke pozitív legyen

  c) mind a két gyöke pozitív legyen d) az egyik gyöke -2 legyen.

- 2) Határozzuk meg a q értékét úgy, hogy a $x^2 - 4x + q = 0$ egyenletnek:

  a) az egyik gyöke a másik gyökének a háromszorosa legyen

  b) az egyik gyök a másik gyök reciproka legyen

  c) az egyik gyök a másik gyök ellentettje legyen

  d) a két gyök különbsége-2 legyen.

- 3) A *p* valós paraméter mely értékei mellett lesz az $x^2 + px + 3 = 0$ egyenlet gyökeinek négyzetösszege 19?

Gyakorló feladatok II.

- 4) Az $x^2 - 6x + 7 = 0$ egyenlet gyökeinek kiszámítása nélkül írjuk fel egy olyan másodfokú egyenletet, amelynek a gyökei az adott egyenlet

  a) gyökeinek 5-szörösei; b) gyökeinél 5-tel nagyobbak!
- 5) Az egyenlet megoldása nélkül számítsa ki az $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$ kifejezés értékét, ha x_1, x_2 a $2x^2 + x - 6 = 0$ egyenlet gyökei.
- 6) A $3x^2 + 5(m - 4)x - 3 = 0$ egyenlet egyik gyöke a másiknak ellentettje. Melyek ezek a gyökök?
- 7) Adjál meg olyan másodfokú egyenletet, amelynek a gyökei -3 és 5!
- 8) Bontsuk fel elsőfokú tényezők szorzatára a $-3x^2 + 5x - 2$ polinomot!
- 9) Bontsuk fel elsőfokú tényezők szorzatára a $x^2 - 4x + 1$ polinomot!

Gyakorló feladatok III.

- 10) Két szám összege 2 és négyzeteinek összege 6. Melyik ez a két szám?
- 11) Két szám szorzata 1, és reciprokainak az összege 4. Melyik ez a két szám?
- 12) Egyszerűsítsük a következő törteket:

  a) $\dfrac{x^2+x-12}{x^2-5x+6}$ b) $\dfrac{2x^2-5x-7}{x^2+8x+7}$ c) $\dfrac{x^3+4x^2+3x}{x^4-10x^2+9}$ d) $\dfrac{x^2-mx+6}{x^2-3x+2}$

- 13) Írjuk fel azt a másodfokú egyenletet amelynek a gyökei:

  a) $x_1=2+\sqrt{3}$ és $x_2=2-\sqrt{3}$ b) $x_1=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ és $x_2=\sqrt{2}-\sqrt{3}$

- 14) Az $x^2-5x+m=0$ egyenlet gyökei x_1 és x_2. Írjuk fel azt az y-ban másodfokú egyenletet, amelynek a gyökei:

  a) $y_1=\dfrac{x_1}{x_2}$ és $y_2=\dfrac{x_2}{x_1}$ b) $y_1=x_1+\dfrac{1}{x_2}$ és $y_2=x_2+\dfrac{1}{x_1}$

- 15) határozzuk meg az egyenlet másik gyökét, ha adott az egyik gyöke:

  a) $x^2-5x+m=0,\ x_1=3$ b) $x^2-mx+6=0,\ x_1=2$

Megoldottam!

Köszönöm a figyelmet!