Micimackó meséje IX. osztályosoknak!

# Másodfokú kétismeretlenes egyenletrendszerek megoldása

- Készítette: Tuzson Zoltán, tanár

# Olyan egyenletek, amelyekben legalább az egyik egyenlet másodfokú

- Például:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ y = x^2 - 3x + 3 \end{cases}$$

- Például:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{13}{6} \\ \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{97}{36} \end{cases}$$

- Például:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ 2x^2 - 3xy + 2y^2 = 16 \end{cases}$$

# A következő típusú egyenletrendszerekkel foglalkozunk:

- 1) Egy elsőfokú, és egy másodfokú egyenletből álló egyenlet rendszer
- 2) Két másodfokú egyenletből álló egyenlet rendszer
- 3) Szimmetrikus egyenlet rendszer
- 4) Homogén egyenlet rendszer

# 1) Egy elsőfokú, és egy másodfokú egyenletből álló egyenlet rendszer

- Általános alakja:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ mx^2 + nxy + py^2 + qx + ry + s = 0 \end{cases}$$

- Elvi megoldása:

az első egyenletből kifejezzük valamelyik ismeretlent, és behelyettesítjük a második egyenletbe, és így egy másodfokú egyenletet kapunk.

# 1. feladat

- Oldjuk meg a következő egyenletrendszert: $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x^2 + xy + y = -1 \end{cases}$

- <u>Megoldás</u>: Az első egyenletből azt kapjuk, hogy $y = 2x - 3$ és ezt beírjuk a második egyenletbe: $x^2 + x(2x-3) + 2x - 3 = -1$ vagyis $3x^2 - x - 4 = 0$ ahonnan $x_1 = -1,\ x_2 = \frac{4}{3}$ így $y_1 = -5,\ y_2 = -\frac{1}{3}$
- Tehát a megoldáshalmaz: $M = \left\{ (-1, -5), \left( \frac{4}{3}, -\frac{1}{3} \right) \right\}$

# 2. feladat

- Oldjuk meg a következő egyenletrendszert: $\begin{cases} 2x+y=1 \\ y^2=x^2-3x+3 \end{cases}$

Megoldás:

- Fejezzük ki az első egyenletből az $y$ változót: $y=1-2x$
- Ezt beírva a második egyenletbe azt kapjuk, hogy $(1-2x)^2=x^2-3x+3$ ahonnan $3x^2-x-2=0$ ezért $x_1=1,\ x_2=-\frac{2}{3}$. Ebből kapjuk, hogy a megoldások:

$$M=\left\{(1,-1)),\left(-\frac{2}{3},\frac{7}{3}\right)\right\}$$

## Az $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ y=mx^2+nx+p \end{cases}$ alakú egyenletrendszer megoldása

- Az első egyenletből kifejezzük az $y$ változót:

$$y=-\frac{ax+c}{b}$$

- De

$$y=mx^2+nx+p$$

- Egyenlővé tesszük a két kifejezést:

$$mx^2+nx+p=-\frac{ax+c}{b}$$

- Rendezzük, és megoldjuk a kapott másodfokú egyenletet.

# 3. feladat

- Oldjuk meg a következő egyenlet rendszert: $\begin{cases} x - y = 3 \\ x^2 - 4x + 3 = y \end{cases}$

<u>Megoldás</u>:

- Fejezzük ki az első egyenletből az $y$ változót: $y = x - 3$
- Beírjuk a második egyenletbe: $x^2 - 4x + 3 = x - 3$ így $x^2 - 5x + 6 = 0$

ahonnan $x_1 = 2,\ x_2 = 3$ és bármelyik egyenletből megkapjuk az $y$-t.

A megoldás tehát:

$$M = \{(2, -1); (3, 0)\}$$

# 4. feladat

- Oldjuk meg a következő egyenlet rendszert $\begin{cases} y - x = 1 \\ -x^2 + 14x - 50 = y \end{cases}$

<u>Megoldás</u>:

- Fejezzük ki az első egyenletből az $y$ változót: $y = x + 1$
- Beírjuk a második egyenletbe: $-x^2 + 14x - 50 = x + 1$ így

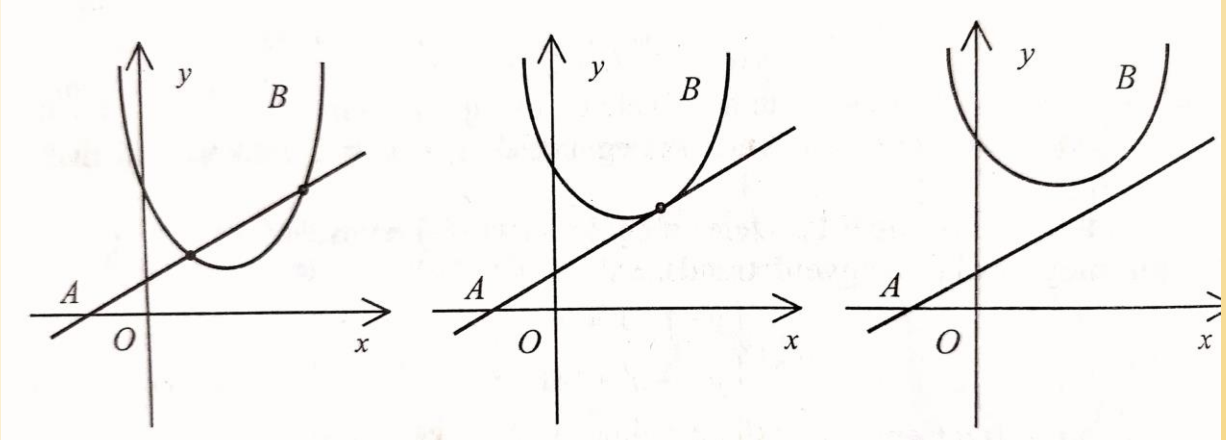
$-x^2 - 13x + 51 = 0$ de az egyenletrendszernek nincsenek valós megoldásai.

A megoldás tehát:

$$M = \varnothing$$

# Az $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ y = mx^2 + nx + p \end{cases}$ alakú egyenletrendszer megoldásának a mértani jelentése

- Az $ax + by + c = 0$ függvény grafikus képe egy egyenes.
- Az $y = mx^2 + nx + p$ függvény grafikus képe egy parabola.
- Tehát az adott egyenletrendszer, egy egyenes és egy parabola kölcsönös helyzetét fejezi ki, ezek lehetnek:




- Ezért van, hogy az egyenlet rendszernek 2, vagy 1, vagy 0 megoldása van.

2) Két másodfokú egyenletből álló

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \\ mx^2 + nxy + py^2 + qx + ry + s = 0 \end{cases}$$

alakú egyenletrendszer megoldása

# 5. feladat

- Oldjuk meg a következő egyenlet rendszert:

$$\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 + x - y = 0 \\ x^2 - 2xy + y^2 - 5x + 7y = 0 \end{cases}$$

<u>Megoldás:</u>

Felírható, hogy $x^2 - 3xy + 2y^2 + x - y = 0 \Leftrightarrow (x-y)(x-2y) + x - y = 0$

Vagyis $(x-y)(x-2y+1) = 0$ . Ha $x - y = 0$ akkor a második egyenlet alapján $7y = 5y$ vagyis $x = y = 0$. Ha pedig $x - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2y - 1$ akkor ezt behelyettesítve a második egyenletbe azt kapjuk, hogy $y^2 - 5y + 6 = 0$ ahonnan $y_1 = 2,\ y_2 = 3$. Tehát a megoldások:

$$M = \{(0,0);(5,3);(3,2)\}$$

## Az $\begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1 = y \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 = y \end{cases}$ alakú egyenletrendszer megoldása

- Egyenlővé tesszük a két kifejezést:

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = a_2x^2 + b_2x + c_2$$

- Innen, egy legfeljebb másodfokú egyenletet kapunk, amit megoldunk.

- Az előző megoldást (megoldásokat) visszaírjuk valamelyik egyenletbe.

# 6. feladat

- Oldjuk meg a következő egyenlet rendszert:

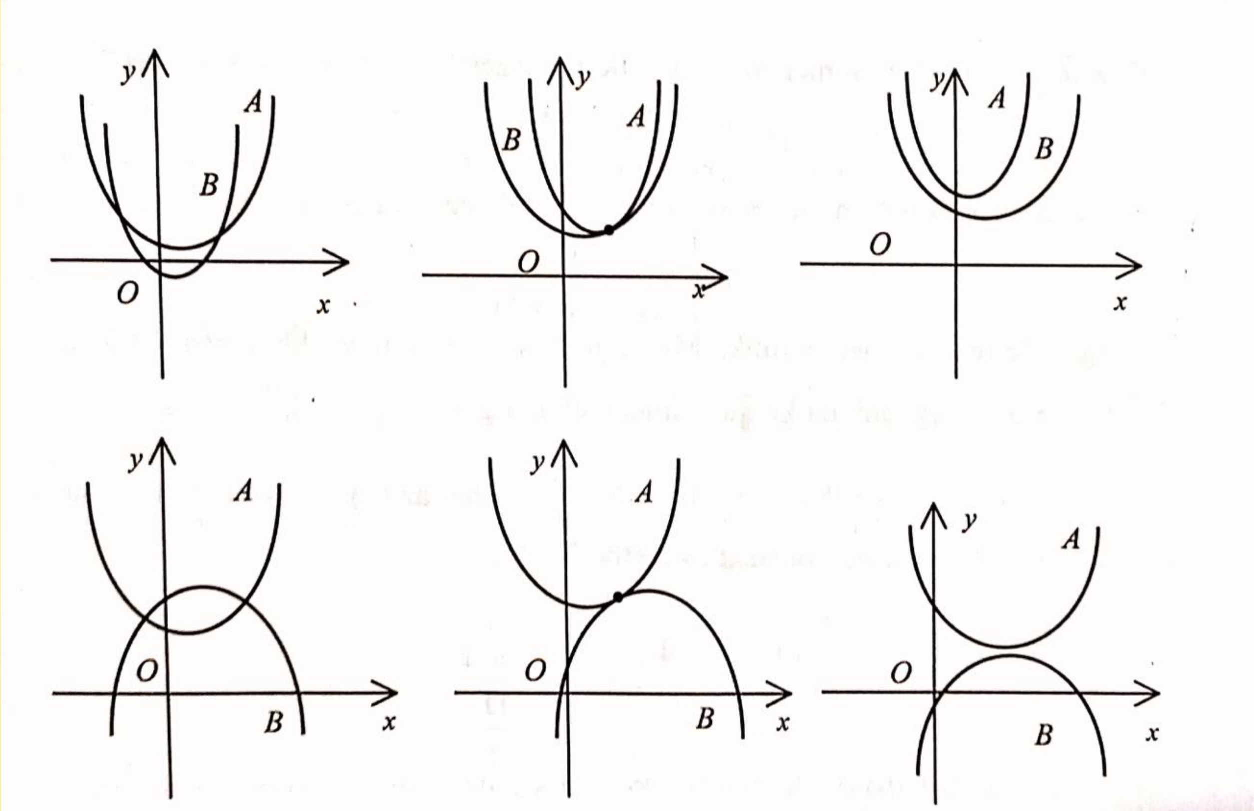
$$\begin{cases} 3x^2 + x - 2 = y \\ 2x^2 - x + 1 = y \end{cases}$$

<u>Megoldás</u>: A két kifejezés egyenlőségéből $3x^2 + x - 2 = 2x^2 - x + 1$ ahonnan $x^2 + 2x - 3 = 0$ és a megoldásai $x_1 = 1,\ x_2 = -2$ és valamelyik egyenlet alapján $y_1 = 2,\ y_2 = 8$. Tehát a megoldások:

$$M = \{(1,2);(-2,8)\}$$

Az $\begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1 = y \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 = y \end{cases}$ alakú egyenletrendszer megoldásának a mértani jelentése

A két parabola kölcsönös helyzetéről van szó



Az $\begin{cases} a_1x^2+b_1x+c_1y+d_1=0 \\ a_2x^2+b_2x+c_2y+d_2=0 \end{cases}$ alakú egyenletrendszer megoldása

- A két egyenletből kiküszöböljük az $y$ változót például úgy, hogy:
- Az első egyenletet megszorozzuk $c_2-\text{vel}:$

$$a_1c_2x^2+b_1c_2x+c_1c_2y+d_1c_2=0$$

- A második egyenletet megszorozzuk $c_1-\text{el}:$

$$a_2c_1x^2+b_2c_1x+c_2c_1y+d_2c_1=0$$

- Ezután a két egyenletet kivonva egymásból egy

$ax^2+bx+c=0$ másodfokú egyenletet kapunk, amit megoldunk.

# 7. feladat

- Oldjuk meg a következő egyenlet rendszert:

$$\begin{cases} 4x^2 - x - 3y - 3 = 0 \\ 2x^2 - x - 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

Megoldás:

- Az első egyenletet szorozzuk be 2-vel: $8x^2 - 2x - 6y - 6 = 0$
- A második egyenletet szorozzuk be 3-mal: $6x^2 - 3x - 6y - 3 = 0$
- A két egyenletet kivonva egymásból azt kapjuk, hogy: $2x^2 + x - 3 = 0$

  és ennek a gyökei $x_1 = 1,\ x_2 = -\frac{3}{2}$ amit visszaírva valamelyik egyenletbe

megkapjuk az $y_1 = 0,\ y_2 = \frac{5}{2}$ értékeket. Tehát a megoldás:

$$M = \left\{ (1,0); \left( -\frac{3}{2}, \frac{5}{2} \right) \right\}$$

# 3) A szimmetrikus egyenlet rendszer

- Egy egyenletet akkor nevezünk szimmetrikusnak, ha összecserélve a két változót, az egyenlet alakja nem változik.
- Például: $2x+2y-3xy=1$ szimmetrikus, $2x-2y-3xy=1$ már nem szimmetrikus. (Cseréld össze a két változót, és írd le!)
- Elemi szimmetrikus kifejezések: $x+y=S$ és $x\cdot y=P$
- A szimmetrikus egyenlet rendszer megoldásának a lépései:

a) Fejezd ki mind a két egyenletet csak S és P segítségével!

b) Oldd meg a kapott egyenletrendszert, tehát megkapod az S és P értékeket.

c) Felírjuk a $t^2-S\cdot t+P=0$ egyenletet (egyenleteket)

d) Megoldjuk az egyenletet, (egyenleteket) megkapjuk $t_1=?,\ t_2=?$

e) Felírjuk a megoldásokat: $M\{(t_1,t_2);(t_2,t_1)\}$

# 8. feladat

- Oldjuk meg a következő egyenlet rendszert: $\begin{cases} xy + x + y = 5 \\ xy - 2(x^2 + y^2) = -8 \end{cases}$

Megoldás:

- Legyen $x + y = S,\ xy = P$ ekkor az első egyenlet: $P + S = 5$ (1)
- Mivel $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = S^2 - 2P$ ezért a második egyenlet így alakul:

  $P - 2(S^2 - 2P) = -8 \Leftrightarrow -2S^2 + 5P = -8$ (2)
- Az (1)-ből P=5-S, és ezt beírva a (2)-be azt kapjuk, hogy $2S^2 + 5S - 33 = 0$

  ahonnan $S_1 = 3,\ S_2 = -\frac{11}{2} \Rightarrow P_1 = 5 - S_1 = 2,\ P_2 = 5 - S_2 = \frac{21}{2}$
- Felírjuk a $t^2 - S \cdot t + P = 0$ egyenleteket:

$$t^2 - 3t + 2 = 0,\ \text{illetve}\ t^2 + \frac{11}{2}t + \frac{21}{2} = 0 \Leftrightarrow 2t^2 + 11t + 21 = 0$$

- Megoldjuk ezeket, és kapjuk: $t_1 = 1,\ t_2 = 2$ illetve a második egyenletnek nincsenek valós megoldásai. Tehát a feladat megoldásai:

$$M = \{(1,2);(2,1)\}$$

4) Az $\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1 \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = d_2 \end{cases}$ alakú úgynevezett homogén egyenletrendszer megoldása

- Az egyenletrendszert azért nevezzük homogénnek, mert minden tagja másodfokú algebrai kifejezés.
- Az első egyenletet megszorozzuk $d_2 - \text{vel}:$

$$a_1d_2x^2 + b_1d_2x + c_1d_2y = d_1d_2$$

- A második egyenletet megszorozzuk $d_1 - \text{el}:$

$$a_2d_1x^2 + b_2d_1x + c_2d_1y = d_1c_2$$

- Ezután a két egyenletet kivonva egymásból egy

$ax^2 + bxy + cy^2 = 0$ homogén másodfokú egyenletet kapunk.

## 4) Az $\begin{cases} a_1x^2+b_1xy+c_1y^2=d_1 \\ a_2x^2+b_2xy+c_2y^2=d_2 \end{cases}$ alakú úgynevezett homogén egyenletrendszer megoldása -folytatás-

- Az $ax^2+bxy+cy^2=0$ egyenletet végig osztjuk $y^2-$tel
  $a\left(\frac{x}{y}\right)^2+b\frac{x}{y}+c=0$ és legyen $\frac{x}{y}=t$ így $at^2+bt+c=0$
- Megoldjuk ezt az egyenletet: $t_1=?,\ t_2=?$
- Felírjuk a következő két egyenlet rendszert:

$$\begin{cases} a_1x^2+b_1xy+c_1y^2=d_1 \\ \frac{x}{y}=t_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1x^2+b_1xy+c_1y^2=d_1 \\ \frac{x}{y}=t_2 \end{cases}$$

- Helyettesítés módszerével megoldjuk ezeket, majd felírjuk a megoldásokat.

# 9. feladat

Oldjuk meg a következő egyenlet rendszert: $\begin{cases} 5x^2 - 6xy + 5y^2 = 16 \\ 7x^2 - 8xy + 7y^2 = 22 \end{cases}$

Megoldás:

- Felírható $\begin{cases} 5x^2 - 6xy + 5y^2 = 16 \,/ \cdot 22 \\ 7x^2 - 8xy + 7y^2 = 22 \,/ \cdot 16 \end{cases}$ és kivonva egymásból a két egyenletet kapjuk,

  hogy: $x^2 + 2xy + y^2 = 0$ és ha $\dfrac{x}{y} = t$ akkor $t^2 + 2t + 1 = 0$ ahonnan $t_1 = t_2 = -1$
- Tehát a megoldandó egyenlet rendszer

$$\begin{cases} 5x^2 - 6xy + 5y^2 = 16 \\ \dfrac{x}{y} = -1 \end{cases}$$

- Tehát $x = -y$ ezért $16x^2 = 16$ ahonnan $x = \pm 1$ tehát $y = \mp 1$ így a megoldás:

$$M = \{(1, -1); (-1, 1)\}$$

# 10. feladat

Oldjuk meg a következő egyenlet rendszert: $\begin{cases} 5x^2-6xy+5y^2=16 \\ 7x^2-8xy+7y^2=22 \end{cases}$

Az egyenletrendszer egyeben homogén is, de szimmetrikus is,

Most szimmetrikus egyenletrendszerként oldjuk meg.

Megoldás:

- Legyen $x+y=S,\ xy=P$ ekkor $x^2+y^2=S^2-2P$ és így az egyenlet rendszer:

$$\begin{cases} 5S^2-16P=16 \\ 7S^2-22P=22 \end{cases}$$

- Az első egyenletet 7-tel, a másodikat 5-tel szorozva és kivonva azt kapjuk, hogy

$$S^2=0 \Rightarrow S=0 \Rightarrow P=-1$$

- A $t^2-S\cdot t+P=0$ egyenlet $t^2-1=0 \Rightarrow t=\pm 1$

Tehát a megoldás: $M=\{(1,-1);(-1,1)\}$

# Gyakorló feladatok I.

Oldjuk meg a következő egyenlet rendszereket:

1)

$$a)\ \begin{cases} y-x+1=0 \\ y=x^2-2x-1 \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} y=x+1 \\ y=x^2-3x+5 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} y-2x=0 \\ y=x^2+x+3 \end{cases}$$

$$d)\ \begin{cases} 2x+y-4=0 \\ y=x^2-3x+2 \end{cases}$$

$$e)\ \begin{cases} x-y-5=0 \\ y=x^2-3x-1 \end{cases}$$

$$f)\ \begin{cases} 2x+y+1=0 \\ y=x^2-5x+4 \end{cases}$$

$$g)\ \begin{cases} y-x=1 \\ y=x^2-3x \end{cases}$$

$$h)\ \begin{cases} x-y=3 \\ y=x^2-4x+3 \end{cases}$$

$$i)\ \begin{cases} 4x-y=1 \\ y=4x^2-x \end{cases}$$

$$j)\ \begin{cases} 3x-y=1 \\ 9x^2-y=3x \end{cases}$$

$$k)\ \begin{cases} 3x+y=1 \\ y+3x^2=x \end{cases}$$

$$l)\ \begin{cases} -8x+y=2=0 \\ 8x^2-2x=y+1 \end{cases}$$

$$m)\ \begin{cases} \dfrac{x-y}{x}=2x \\ -2x+y=-3 \end{cases}$$

$$n)\ \begin{cases} \dfrac{3x-3y}{x-1}=\dfrac{2x}{3} \\ \dfrac{9y+6}{8}=-\dfrac{x}{2}+1 \end{cases}$$

$$o)\ \begin{cases} \dfrac{6x-2y}{x-2}=\dfrac{x}{5} \\ \dfrac{y-x}{3}=\dfrac{128-5x}{15} \end{cases}$$

$$p)\ \begin{cases} \dfrac{3x}{y-x}=\dfrac{5}{x-2} \\ \dfrac{5y}{x+1=1} \end{cases}$$

# Gyakorló feladatok II.

Oldjuk meg a következő egyenlet rendszereket:

2)

$$a)\ \begin{cases} y-x=1 \\ x^2-xy-y^2+x-3=0 \end{cases} \quad b)\begin{cases} x^2-xy-y=5 \\ 2x-3y=3 \end{cases} \quad c)\ \begin{cases} x^2-y^2-6y=-4 \\ 2x+y=3 \end{cases}$$

$$d)\ \begin{cases} \dfrac{x^2-xy+1}{x-y}=3 \\ 2x+3y=7 \end{cases} \quad b)\begin{cases} \dfrac{x^2-xy+1}{x+y}=x-y \\ x+2y=4=3 \end{cases} \quad c)\ \begin{cases} x^2+3xy-y^2+2x-5y=-64 \\ x-y=-7 \end{cases}$$

$$a)\ \begin{cases} x+2y=5 \\ x^2+2y^2-xy=7 \end{cases} \quad b)\begin{cases} 2x-y=3 \\ x^2+xy+y=-1 \end{cases} \quad c)\ \begin{cases} x-3y=0 \\ 2x^2+6xy-9y^2=x+2y \end{cases}$$

# Gyakorló feladatok III.

Oldjuk meg a következő egyenlet rendszereket:

3)

$$a)\ \begin{cases} y = x^2 - 3x \\ y = -x^2 + 2 \end{cases} \quad b)\ \begin{cases} x^2 - 2x - 3 = y \\ x^2 - 4x - 3 = y \end{cases} \quad c)\ \begin{cases} x^2 - 4x + 1 = y \\ x^2 + x - 5 = y \end{cases}$$

$$d)\ \begin{cases} x^2 + 2x - 1 = y \\ 2x^2 - x + 4 = y \end{cases} \quad e)\ \begin{cases} x^2 - 2x - 5 = y \\ -x^2 + 4x + 3 = y \end{cases} \quad f)\ \begin{cases} 3x^2 - 3x + 2 = y \\ -x^2 + x + 1 = y \end{cases}$$

$$g)\ \begin{cases} 2x^2 + 5x + 14 = -y \\ 2x^2 + 7x - 5 = y \end{cases} \quad h)\ \begin{cases} -x^2 = y \\ x^2 - 2x - y = -1 \end{cases} \quad i)\ \begin{cases} 2x^2 - 3x + 1 = y \\ -3x^2 + 4x - y = 1 \end{cases}$$

# Gyakorló feladatok IV.

Oldjuk meg a következő szimmetrikus egyenlet rendszereket:

4)

$a)\ \begin{cases} x+y=2 \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$ $b)\begin{cases} 2xy+5(x+y)=55 \\ 6xy+3(x+y)=81 \end{cases}$ $c)\begin{cases} xy+x+y=7 \\ xy-3(x+y)=-9 \end{cases}$

$d)\begin{cases} 2(x+y)+xy=59 \\ 3(x+y)-2xy=-34 \end{cases}$ $\mathrm{e})\begin{cases} x+y+xy=29 \\ xy-2(x+y)=2 \end{cases}$ $\mathrm{f})\ \begin{cases} x^3+y^3=2 \\ x^2-xy+y^2=1 \end{cases}$

$g)\ \begin{cases} x^3-y^3=1 \\ x^2+xy+y^2=7 \end{cases}$ $\mathrm{h})\begin{cases} x+xy+y=11 \\ x^2y+xy^2=30 \end{cases}$ $\mathrm{i})\ \begin{cases} x^3+y^3=1 \\ x+y=1 \end{cases}$ $j)\ \begin{cases} x^2+y^2=8 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1 \end{cases}$

# Gyakorló feladatok V.

Oldjuk meg a következő szimmetrikus egyenlet rendszereket:

4)

$$j)\ \begin{cases} x+y+\sqrt{xy}=14 \\ x^2+y^2+xy=84 \end{cases} \quad \text{k)}\begin{cases} x+y+xy=5 \\ x^2+y^2+x^2y^2=9 \end{cases} \quad \text{l)}\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=15 \\ x+y=3 \end{cases}$$

$$m)\begin{cases} x^2+xy+y^2=3 \\ 2x^2-3xy+2y^2=16 \end{cases} \quad \text{n)}\begin{cases} 5x^2-6xy+5y^2=29 \\ 7x^2-8xy+7y^2=43 \end{cases} \quad \text{o)}\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}=\dfrac{4}{3} \\ xy=9 \end{cases}$$

$$p)\ \begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{13}{6} \\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{97}{36} \end{cases} \quad \text{q)}\begin{cases} x+y=3 \\ \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=\dfrac{9}{2} \end{cases} \quad \text{r)}\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{5}{2} \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{16} \end{cases} \quad \text{s)}\begin{cases} xy=2 \\ \dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

# Gyakorló feladatok VI.

Oldjuk meg a következő homogén egyenlet rendszereket:

5)

$$a)\ \begin{cases} x^2+xy+y^2=3 \\ 2x^2-3xy+2y^2=16 \end{cases} \quad b)\begin{cases} 5x^2-6xy+5y^2=29 \\ 7x^2-8xy+7y^2=43 \end{cases} \quad c)\begin{cases} 2x^2+7y^2=15 \\ -x^2+3xy=2 \end{cases}$$

$$d)\begin{cases} x^2-5xy+2y^2=-1 \\ x^2+5y^2=21 \end{cases} \quad \mathrm{e})\begin{cases} 3x^2-2y^2=-5 \\ x^2-xy+y^2=1 \end{cases} \quad \mathrm{f})\ \begin{cases} 4x^2-5xy+4y^2=118 \\ x^2-xy-y^2=-41 \end{cases}$$

Megoldottam!

# Köszönöm a figyelmet!