Micimackó meséje IX. osztályosoknak!

Másodfokú törtes egyenlőtlenségek

- Készítette: Tuzson Zoltán, tanár

Általános alakjuk, az alábbiak valamelyike:

$$\frac{ax^2+bx+c}{cx^2+dx+e}>0 \qquad \frac{ax^2+bx+c}{cx^2+dx+e}<0$$

$$\frac{ax^2+bx+c}{cx^2+dx+e}\geq 0 \qquad \frac{ax^2+bx+c}{cx^2+dx+e}\leq 0$$

Ezeket mindig előjeltáblázattal oldjuk meg!

A feladat megoldásának a lépései:

- 1) Megoldjuk az $ax^2+bx+c=0 \Rightarrow x_1=?,\ x_2=?$ egyenletet.
- 2) Megoldjuk a $dx^2+ex+f=0 \Rightarrow x_3=?,\ x_4=?$ egyenletet.
- Elkészítjük a következő 3 soros előjeltáblázatot:

x	$-\infty$		x_3		x_1		x_2		x_4		$+\infty$
ax^2+bx+c		előjelek			0	előjelek	0		előjelek		
dx^2+ex+f		előjelek	0			előjelek			0	előjelek	
$\dfrac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}$		előjelek			0	előjelek	0			előjelek	

- A legalsó sorból kiolvassuk a megfelelő intervallumot, és felírjuk az eredményt.
- A függőleges vonalakat oda tesszük, ahol a nevező nulla lenne!

1. feladat

- Oldjuk meg a $\dfrac{-x^2+2x+3}{x^2-8x+12}>0$ egyenlőtlenséget!

- $-x^2+2x+3=0 \Rightarrow x_1=-1,\ x_2=3$ *és* $x^2-8x+12=0 \Rightarrow x_3=2,\ x_4=6$

x	$-\infty$		-1		2		3		6		$+\infty$
$-x^2+2x+3$		- - - - - -	0	+ + + + + +		+ +	0	- - - - - -		- - - - - -	
$x^2-8x+12$		+ + + + + +		+ + + + + +	0	- - -		- - - - - -	0	+ + + + + +	
$\dfrac{-x^2+2x+3}{x^2-8x+12}$		- - - - - -	0	+ + + + + +	|	- - -	0	+ + + + + +	|	- - - - - -	

- Megoldás: $x \in (-1,2) \cup (3,6)$

2. feladat

- Oldjuk meg a $\dfrac{x^2+2x-2}{x^2-3x+4}>3$ egyenlőtlenséget!

$$\frac{x^2+2x-2}{x^2-3x+4}>3 \Leftrightarrow \frac{x^2+2x-2}{x^2-3x+4}-3>0 \Leftrightarrow \frac{-2x^2+11x-14}{x^2-3x+4}>0$$

$$-2x^2+11x-14=0 \Rightarrow x_1=2,\ x_2=\frac{7}{2}=3{,}5 \qquad x^2-3x+4=0 \Rightarrow x\in\varnothing$$

x	$-\infty$		2		3,5		$+\infty$
$-2x^2+11x-14$		- - - - - - - - - -	0	+ + + + + + + + + + +	0	- - - - - - - - - -	
x^2-3x+4		+ + + + + + + + + +	+	+ + + + + + + + + + +	+	+ + + + + + + + + +	
$\dfrac{-2x^2+11x-14}{x^2-3x+4}$		- - - - - - - - - -	0	+ + + + + + + + + + +	0	- - - - - - - - - -	

- Megoldás: $x\in\left(2,\dfrac{7}{2}\right)$

3. feladat

- Oldjuk meg a $\dfrac{x+5}{x+2} \geq \dfrac{1}{x-3}$ egyenlőtlenséget!

$$\frac{x+5}{x+2} \geq \frac{1}{x-3} \Leftrightarrow \frac{x+5}{x+2} - \frac{1}{x-3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+2x-15}{(x+2)(x-3)} \geq 0$$

$$x^2+2x-15=0 \Rightarrow x_1=-5,\ x_2=3 \qquad (x+2)(x-3)=0 \Rightarrow x_3=-2, x_4=3$$

x	$-\infty$		-5		-2		3		$+\infty$
$x^2+2x-15$		+ + + + + + + + + + + + + +	0	- - - - - -	- - -	- - - - -	0	+ + + + + + + + + + + + + + + + + + + +	
$(x+2)(x-3)$		+ + + + + + + + + + + + + +	+ + +	+ + + + +	0	- - - - - - - -	0	+ + + + + + + + + + + + + + + + + + + +	
$\dfrac{x^2+2x-15}{(x+2)(x-3)}$		+ + + + + + + + + + + + + + +	0	- - - - - -	0	+ + + + + +	|	+ +	

- Megoldás: $x \in (-\infty, -5] \cup (-2, 3] \cup (3, \infty)$

4. feladat

- Oldjuk meg a $\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{x-4}{x+2}\le 2$ egyenlőtlenséget!

$$\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-4}{x+2}\le 2 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1}+\frac{x-4}{x+2}-2\le 0 \Leftrightarrow \frac{x+50}{(x-1)(x+2)}\le 0$$

$$x+50=0 \Rightarrow x_1=-50 \qquad (x+2)(x-1)=0 \Rightarrow x_2=-2, x_3=1$$

x	$-\infty$		-50		-2		1		$+\infty$
$x+50$		- - - - - - - - - -	0	+ + + + + + + +	+	+ + + + + + +	+	+ + + + + + + +	
$(x+2)(x-1)$		+ + + + + + + + + +	+	+ + + + + + + +	0	- - - - - - -	0	+ + + + + + + +	
$\dfrac{x+50}{(x+2)(x-1)}$		- - - - - - - - - -	0	+ + + + + + + +	|	- - - - - - -	|	+ + + + + + + +	

- Megoldás: $x\in(-\infty,-50]\cup(-2,1)$

5. feladat

- Oldjuk meg a $\dfrac{x-3}{x-7} \le 2 - \dfrac{x-1}{x+7}$ egyenlőtlenséget!

$$\frac{x-3}{x-7} \le 2 - \frac{x-1}{x+7} \Leftrightarrow \frac{x-3}{x-7} - 2 + \frac{x-1}{x+7} \le 0 \Leftrightarrow \frac{4x-84}{(x+7)(x-7)} \le 0$$

$4x-84=0 \Rightarrow x_1 = 21$ $\qquad$ $(x+7)(x-7)=0 \Rightarrow x_2 = -7, x_3 = 7$

x	$-\infty$	-7		7		21		$+\infty$
$4x-84$	- - - - - - - -	-	- - - - - - - -	-	- - - - - -	0	+ + + + + + + +	
$(x+7)(x-7)$	+ + + + + + + +	0	- - - - - - - -	0	+ + + + + +	+	+ + + + + + + +	
$\dfrac{4x-84}{(x+7)(x-7)}$	- - - - - - - -	|	+ + + + + + +	|	- - - - - -	0	+ + + + + + + +	

- Megoldás: $x \in (-\infty, -7) \cup (7, 21]$

6. feladat

- Oldjuk meg a $\dfrac{-x^2+4x-4}{x^2-3x+3} \geq 0$ egyenlőtlenséget!

- $-x^2+4x-4=0 \Rightarrow x_1=x_2=2$ *és* $x^2-3x+3=0 \Rightarrow x \in \emptyset$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$-x^2+4x-4$	- - - - - - - - - -	0	- - - - - - - - - -
x^2-3x+3	+ + + + + + + + + +	+ + + +	+ + + + + + + + + +
$\dfrac{-x^2+4x-4}{x^2-3x+3}$	- - - - - - - - - -	0	- - - - - - - - - -

- Megoldás: $x \in \{2\}$

7. feladat

- Oldjuk meg a $\dfrac{-x^2+4x-5}{x^2-2x+1}>0$ egyenlőtlenséget!
- $-x^2+4x-5=0 \Rightarrow x\in\varnothing$ *és* $x^2-2x+1=0 \Rightarrow x_1=x_2=1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$-x^2+4x-5$	- - - - - - - - - - - -	- - - - - -	- - - - - - - - - - - -
x^2-2x+1	+ + + + + + + + + + + +	+ + + + + +	+ + + + + + + + + + + +
$\dfrac{x^2+4x+5}{x^2-2x+1}$	- - - - - - - - - - - -	|	- - - - - - - - - - - -

- Megoldás: $x\in\varnothing$

Gyakorló feladatok

Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket:

a) $\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-4x+4} \geq 0$

b) $\dfrac{x^2+5x-4}{x^2-6x+4} < 0$

c) $\dfrac{x^2-6x-16}{-x^2+8x-12} > 0$

d) $\dfrac{x^2-6x+5}{-3x^2-2x-7} < 0$

e) $\dfrac{x^2+x-6}{-x^2-4x} > 0$

f) $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-2x-8} < 0$

g) $\dfrac{x-1}{x^2-3x+2} > 2$

h) $\dfrac{x^2+2x+2}{x^2-1} > 2$

i) $\dfrac{2x+1}{2x^2+3x-2} < 2$

j) $\dfrac{2x+3}{x^2+x+1} \geq 1$

k) $-1 < \dfrac{x^2+3x+2}{x^2-4x+3} \leq 2$

l) $-1 < \dfrac{3x-1}{x^2-2x+12} < 1$

m) $\dfrac{x^2-6x+5}{-3x^2-2x-7} < 0$

n) $\dfrac{x^2-4x+5}{x^2-2x+2} \leq \dfrac{2}{5}$

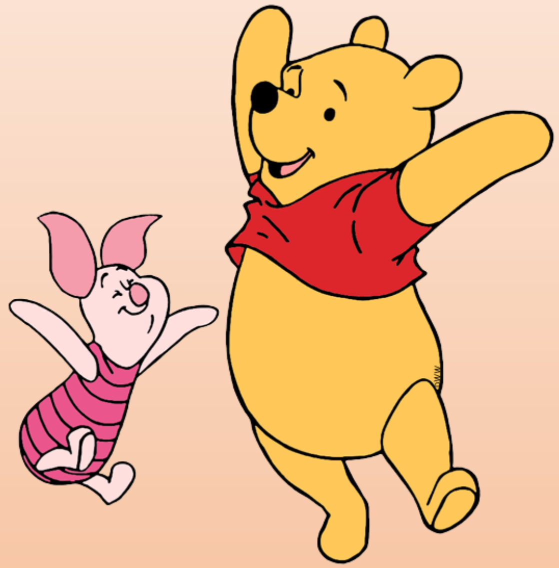
o) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-2x+1} < 6$

p) $\dfrac{1}{x-2} < \dfrac{2}{x-3}$

q) $\dfrac{3}{x+1} + \dfrac{7}{x+2} < \dfrac{6}{x-1}$

r) $\dfrac{x^2-1}{x^2+1} > -1$

Megoldottam!



Köszönöm a figyelmet!