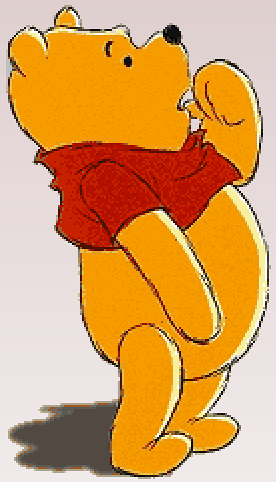
Micimackó meséje IX. osztályosoknak!

Másodfokú egyenlet megoldására visszavezethető racionális egyenletek



- Készítette: Tuzson Zoltán, tanár

A továbbiakban olyan feladatokat oldunk meg, amikor valamilyen egyenletet, egy jól megválasztott változócserével visszavezetünk másodfokú egyenlet megoldására.

Az egyenleteket csak a valós számok halmazán oldjuk meg!

1. Megoldott feladat

- Oldjuk meg az $(x^2-2x)^2-(x^2-2x)-6=0$ egyenletet!

<u>Megoldás:</u>

- Végezzük el a következő változócserét: $x^2-2x=y$ tehát azt kapjuk, hogy $y^2-y-6=0$ amelynek a gyökei $y_1=3,\ y_2=-2$
- Tehát $x^2-2x=3$ vagy $x^2-2x=-2$
- Ha $x^2-2x=3$ akkor $x^2-2x-3=0$ ahonnan $x_1=3,\ x_2=-1$
- Ha $x^2-2x=-2$ akkor $x^2-2x+2=0$ ellenben ennek az egyenletnek nincsenek valós megoldásai.

2. Megoldott feladat

- Oldjuk meg az $\left(x^2+x+2\right)\left(x^2+x+3\right)=2$ egyenletet!

Megoldás:

- Végezzük el a következő változócserét: $x^2+x+2=y$ tehát azt kapjuk, hogy $y(y+1)=2$ vagyis $y^2+y-2=0$ amelynek a gyökei $y_1=1,\ y_2=-2$
- Ha $y_1=1$ akkor $x^2+x+2=1$ vagyis $x^2+x+1=0$ ellenben ennek az egyenletnek nincsenek valós megoldásai.
- Ha $y_1=-2$ akkor $x^2+x+2=-2$ vagyis $x^2+x+4=0$ ellenben ennek az egyenletnek nincsenek valós megoldásai.
- Tehát a feladatnak nincsenek valós megoldásai.

3. Megoldott feladat

- Oldjuk meg az $\left(\frac{x^2+8}{x}\right)^2-11\frac{x^2+8}{x}=-18$ egyenletet!

Megoldás:

- Végezzük el a következő változócserét: $\frac{x^2+8}{x}=y$ tehát azt kapjuk, hogy $y^2-11y+18=0$ amelynek a gyökei $y_1=9,\ y_2=2$
- Ha $y_1=1$ akkor $\frac{x^2+8}{x}=9$ vagyis $x^2-9x+8=0$ aminek a megoldásai $x_1=1,\ x_2=8$
- Ha $y_1=2$ akkor $\frac{x^2+8}{x}=2$ vagyis $x^2-2x+8=0$ de ennek az egyenletnek nincsenek valós megoldásai.

4. Megoldott feladat

- Oldjuk meg az $\frac{x^2+x}{x+1}-\frac{x+1}{x^2+x}=\frac{3}{2}$ egyenletet!

<u>Megoldás:</u>

- Végezzük el a következő változócserét: $\frac{x^2+x}{x+1}=y$ tehát azt kapjuk, hogy $y-\frac{1}{y}=\frac{3}{2}$ vagyis $2y^2-3y-1=0$ amelynek a gyökei $y_1=-\frac{1}{2}$, $y_2=2$
- Ha $y_1=-\frac{1}{2}$ akkor $\frac{x^2+x}{x+1}=-\frac{1}{2}$ vagyis $2x^2+3x-1=0$ aminek a megoldásai $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=-2$
- Ha $y_1=2$ akkor $\frac{x^2+x}{x+1}=2$ vagyis $x^2-x-2=0$ aminek a megoldásai $x_1=-1\ x_2=2$

5. Megoldott feladat

- Oldjuk meg az $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^2+\dfrac{1}{x}=41$ egyenletet!

<u>Megoldás:</u>

- Végezzük el a következő változócserét: $1+\dfrac{1}{x}=y$ tehát azt kapjuk, hogy $y^2+y=42$ vagyis $y^2+y-42=0$ amelynek a gyökei $y_1=6,\ y_2=-7$
- Ha $y_1=6$ akkor $1+\dfrac{1}{x}=6$ vagyis $\dfrac{1}{x}=5$ ahonnan $x=\dfrac{1}{5}$
- Ha $y_1=-7$ akkor $1+\dfrac{1}{x}=-7$ vagyis $\dfrac{1}{x}=-8$ ahonnan $x=-\dfrac{1}{8}$

6. Megoldott feladat

- Oldjuk meg az $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{18}{x^2}=\dfrac{13}{5}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{3}{x}\right)$ egyenletet!

<u>Megoldás:</u>

- Végezzük el a következő változócserét: $\dfrac{x}{2}+\dfrac{3}{x}=y$. Ekkor $\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{3}{x}\right)^2=y^2$

  ahonnan azt kapjuk, $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{9}{x^2}=y^2-3$ tehát így $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{18}{x^2}=2\left(\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{9}{x^2}\right)$

- Ezek szerint az eredeti egyenlet így alakul: $2(y^2-3)=\dfrac{13}{5}y$ vagyis $10y^2-13y-30=0$ ahonnan $y_1=-\dfrac{6}{5}$, $y_2=\dfrac{5}{2}$

- Ha $y_1=-\dfrac{6}{5}$ akkor $\dfrac{x}{2}+\dfrac{3}{x}=-\dfrac{6}{5}\Rightarrow 5x^2+12x+30=0$ de nincs valós megoldás.

- Ha $y_2=\dfrac{5}{2}$ akkor $\dfrac{x}{2}+\dfrac{3}{x}=\dfrac{5}{2}\Rightarrow x^2-5x+6=0$ ahonnan $x_1=2,\ x_2=3$

7. Megoldott feladat

- Oldjuk meg az $\left|x^2-2x+1\right|-3\left|x^2-1\right|+2\left|x^2+2x+1\right|=0$ egyenletet!

Megoldás:

- Az egyenlet még így írható: $\left|x-1\right|^2-3\left|x-1\right|\left|x+1\right|+2\left|x+1\right|^2=0$. Most osszuk végig az egyenletet $\left|x+1\right|^2$ ekkor azt kapjuk, hogy $\left|\frac{x-1}{x+1}\right|^2-3\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+2=0$
- Vezessük be a $\left|\frac{x-1}{x+1}\right|=y$ jelölést, ekkor azt kapjuk, hogy $y^2-3y+2=0$ ahonnan $y_1=1,\ y_2=2$
- Ha $y_1=1$ akkor $\left|\frac{x-1}{x+1}\right|=1$ ezért $\frac{x-1}{x+1}=1$ vagy $\frac{x-1}{x+1}=-1$ ahonnan $x=0$
- Ha $y_2=2$ akkor $\left|\frac{x-1}{x+1}\right|=2$ ezért $\frac{x-1}{x+1}=2$ vagy $\frac{x-1}{x+1}=-2$ ahonnan $x_1=1,\ x_2=-\frac{1}{3}$

8. Megoldott feladat

- Oldjuk meg az $x(x+1)(x+2)(x+3)=24$ egyenletet!

<u>Megoldás:</u>

- Vegyük észre, hogy $x(x+3)=x^2+3x$ és $(x+1)(x+2)=x^2+3x+2$
- Így vezessük be a következő jelölést: $x^2+3x=y$ ekkor azt kapjuk, hogy
  $y(y+2)=24$ vagyis $y^2+2x-24=0$ ahonnan $y_1=-6,\ y_2=4$
- Ha $y_1=-6$ akkor $x^2+3x=-6$ vagyis $x^2+3x+6=0$ és nincsenek valós megoldások.
- Ha $y_2=4$ akkor $x^2+3x=4$ vagyis $x^2+3x-4=0$ és ennek a valós megoldásai $x_1=-4,\ x_2=1$

Megjegyzés

- Ez utóbbi egyenlet így általánosítható:

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=m$$

azzal a feltétellel, hogy $a+b=c+d$

Ekkor $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

és $(x+c)(x+d)=x^2+(c+d)x+cd$

ezért bevezethető az $x^2+(a+b)x=y$ változócsere

és az egyenletünket visszavezettük másodfokú egyenletre: $(y+ab)(y+cd)=m$

9. Megoldott feladat

- Oldjuk meg az $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ egyenletet!

Megoldás:

- Vezessük be az $x^2 = y$ változócserét, így $y^2 - 5y + 4 = 0$ ahonnan

  $y_1 = 1,\ y_2 = 4$ ezért $x^2 = 1 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$ illetve $x^2 = 4 \Rightarrow x_{3,4} = \pm 2$

Megjegyzés:

- Teljesen hasonlóan oldható meg az úgynevezett bikvadratikus egyenlet is:

$$x^{2n} + px^n + q = 0$$

- Itt bevezetve az $x^n = y$ változócserét, az $y^2 + py + q = 0$ másodfokú egyenletet kell megoldanunk, majd az $x^n = y_1$ illetve $x^n = y_2$

  binomegyenleteket.

10. Megoldott feladat

- Oldjuk meg az $2x^4+3x^3+2x^2+3x+2=0$ egyenletet!

Megoldás:

- Osszuk végig az egyenletet x^2-tel, és azt kapjuk, hogy $2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)+2=0$
  Most könnyen belátható, hogy célszerű az $x+\frac{1}{x}=y$ változócsere, így mivel $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$ ezért azt kapjuk, hogy $2y^2+3y-2=0$ ahonnan $y_1=-2,\ y_2=\frac{1}{2}$
- Ha $y_1=-2$ akkor $x+\frac{1}{x}=-2$ tehát $x^2+2x+1=0$ ahonnan $x_1=x_2=-1$
- Ha ellenben $y_2=\frac{1}{2}$ akkor $x+\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$ tehát $2x^2-x+2=0$ és ennek az egyenletnek nincs valós megoldása.

Megjegyzés:

- Az adott egyenlet általános alakja $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$

  amit szimmetrikus egyenletnek nevezünk, és a megoldása az előbbiek mintájára történik.

11. Megoldott feladat

- Oldjuk meg az $2x^4+3x^3-4x^2-3x+2=0$ egyenletet!

<u>Megoldás:</u>

- Osszuk végig az egyenletet x^2 -tel, és azt kapjuk, hogy $2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x-\frac{1}{x}\right)+2=0$
  Most könnyen belátható, hogy célszerű az $x-\frac{1}{x}=y$ változócsere, így mivel $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2+2$ ezért azt kapjuk, hogy $2y^2+3y=0$ ahonnan $y_1=0,\ y_2=-\frac{3}{2}$
- Ha $y_1=0$ akkor $x-\frac{1}{x}=0$ tehát $x^2-1=0$ ahonnan $x_1=1,\ x_2=-1$
- Ha ellenben $y_2=-\frac{3}{2}$ akkor $x-\frac{1}{x}=-\frac{3}{2}$ tehát $2x^2+3x-2=0$ ahonnan $x_3=-2,\ x_4=\frac{1}{2}$

<u>Megjegyzés</u>:

- Az adott egyenlet általános alakja $ax^4\mp bx^3\pm cx^2\pm bx+a=0$

  ami a szimmetrikus egyenlethez hasonló változat, és a megoldása az előbbiek mintájára történik.

12. Megoldott feladat

- Oldjuk meg az $x^4 + x^3 - 6x^2 - 2x + 4 = 0$ egyenletet!

Megoldás:

- Mivel $\left(\frac{4}{1}\right) = \left(\frac{-2}{1}\right)^2$ ezért osszuk végig az egyenletet x^2-tel, és azt kapjuk, hogy

$$x^2 + \frac{4}{x^2} + x - \frac{2}{x} - 6 = 0$$

- Most könnyen belátható, hogy célszerű az $x - \frac{2}{x} = y$ változócsere, így mivel $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + 4$ ezért azt kapjuk, hogy $y^2 + y - 2 = 0$ ahonnan $y_1 = -2,\ y_2 = 1$
- Ha $y_2 = -2$ akkor $x - \frac{2}{x} = -2$ tehát $x^2 + 2x - 2 = 0$ ahonnan $x_1 = -1 + \sqrt{3},\ x_2 = -1 - \sqrt{3}$
- Ha ellenben $y_1 = 1$ akkor $x - \frac{2}{x} = 1$ tehát $x^2 - x - 2 = 0$ ahonnan $x_3 = -1,\ x_4 = 2$

Megjegyzés:

- Az adott egyenlet általános alakja $ax^4 + bx^3 \pm cx^2 + dx + e = 0$ ahol $\left(\frac{e}{a}\right) = \left(\frac{d}{b}\right)^2$

  Ez egy reverzibilis egyenlet, amelynél végig osztva x^2-tel és elvégezve az $y = x + \frac{d}{bx}$ változócserét, az előbbihez hasonlóan járunk el.

13. Megoldott feladat

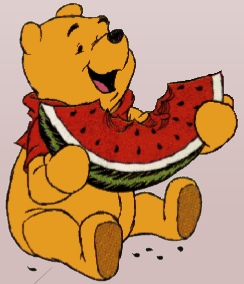
- Oldjuk meg az $\frac{2x}{2x^2-5x+3}+\frac{13x}{2x^2+x+3}=6$ egyenletet!

<u>Megoldás</u>:

- Az egyenlet így is írható: $\frac{2}{2x-5+\frac{3}{x}}+\frac{13}{2x+1+\frac{3}{x}}=6$ és bevezetve a $2x+\frac{3}{x}=y$

  jelölést, azt kapjuk, hogy $\frac{2}{y-5}+\frac{13}{y+1}=6 \Leftrightarrow 2y^2-13y+11=0$ ahonnan $y_1=1,\ y_2=\frac{11}{2}$

- Ha $y_1=1$ akkor $2x+\frac{3}{x}=1$ ahonnan $2x^2-x+3=0$ de az egyenletnek nincs valós megoldása.
- Ha $y_2=\frac{11}{2}$ akkor $2x+\frac{3}{x}=\frac{11}{2}$ ahonnan $4x^2-11x+6=0$ és innen $x_1=\frac{3}{4},\ x_2=2$



Gyakorló feladatok I.

- Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $(x^2-16x)^2-2(x^2-16x)-63=0$

b) $(x^2+x+1)(x^2+x+2)=12$

c) $(x^2+7x+9)(x^2+7x+7)=3$

d) $\left|x^2-4x+4\right|-4\left|x^2-4\right|+3\left|x^2+4x+4\right|=0$

e) $\left(\frac{1}{x}+2\right)^2+\frac{1}{x}=10$

f) $x^2-4x+\frac{10}{x^2-4x+5}=2$

g) $2x^2+\frac{2}{x^2}=5x+\frac{5}{x}+8$

h) $x^2+\frac{49}{x^2}+2\left(x+\frac{7}{x}\right)=34$

i) $\frac{x^2-3x}{x-2}+\frac{x-2}{x^2-3x}=\frac{5}{2}$

j) $\frac{x}{x^2+2}+\frac{6x}{x^2-6x+2}=1$

k) $x(x-1)(x-2)(x-3)=120$

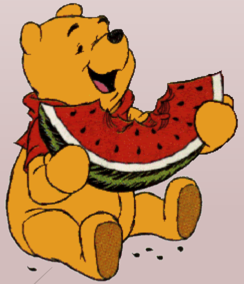
l) $(x^2+2x)^2-5(x^2+2x)+3=0$

m) $(x-2)(x-1)(x+3)(x+4)=84$

n) $(x-2)(x+1)(x+4)(x+7)=9$

o) $(2x^2+5x-4)^2-5x^2(2x^2+5x-4)+6x^4=0$

p) $(x^2-1)^2-5x^2-11=0$



Gyakorló feladatok II.

- Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $\frac{2x+1}{x}+\frac{4x}{2x+1}=5$

b) $20\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2-5\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2+48\frac{x^2-4}{x^2-1}=0$

c) $\left(x^2-x\right)^2-2(x^2-x)+1=0$

d) $\left(\frac{2x^2}{2x-1}\right)^2-\frac{2x^2}{2x-1}-2=0$

e) $\frac{x^2}{3}+\frac{48}{x^2}=10\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right)$

f) $(1-x)(2-x)(x+3)(x+4)=84$

g) $\frac{2x}{2x^2-5x+3}+\frac{13x}{2x^2-5x+3}=6$

h) $\left(2x^2+5x-4\right)^2-5x^2\left(2x^2+5x-4\right)+6x^4=0$

i) $x^4-4x^3+2x^2+4x+2=0$

j) $x^4+6x^3+5x^2-12x+3=0$

Gyakorló feladatok III.

- Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $$\frac{x+1}{x-1}-\frac{x+2}{x+3}+\frac{4}{(x-1)(x+3)}=0$$

b) $$\frac{3}{(x+2)(x-1)}=\frac{1}{x(x-1)^2}+\frac{3}{x(x-3)}$$

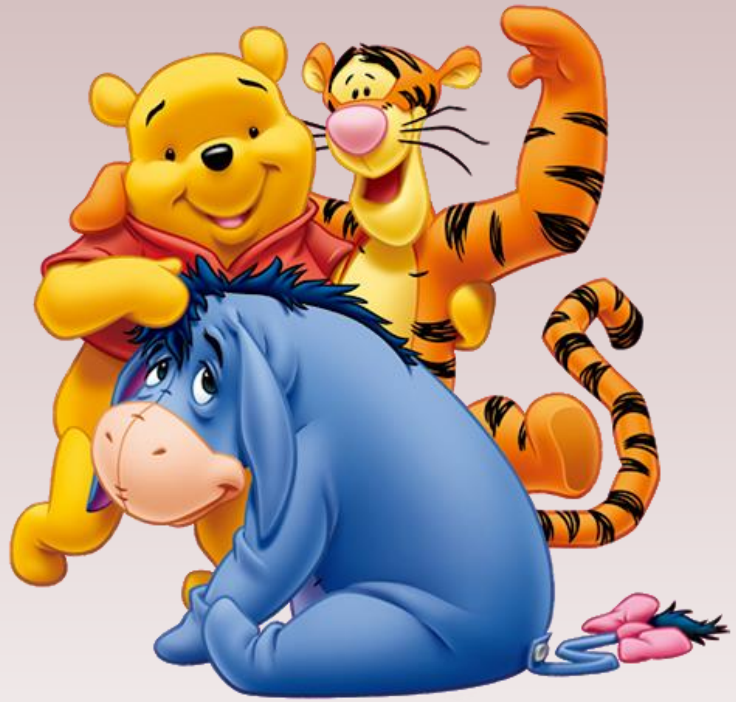
c) $$(x^2+x+1)(x^2+x+2)=12$$

e) $$\frac{24}{x^2-2x}=\frac{12}{x^2-x}+x^2-x$$

f) $$6x^4-5x^2+1=0$$

g) $$x^4+x^3-12x^2-26x-24=0$$

Megoldottam!



Köszönöm a figyelmet!