Összegek kiszámolása

Rövidített jelölés: $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

Tulajdonságok: (1) $\sum_{k=1}^{n} 1 = \underbrace{1+1+...+1}_{n-szer} = n$

(2) $\sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$ (3) $\sum_{k=1}^{n} \lambda \cdot a_k = \lambda \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k$

1) Számítsuk ki az $S_1 = 1 + 2 + 3 + ... + n = \sum_{k=1}^{n} k$ összeget.

Megoldás:

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 + 2 + 3 + ... + (n-1) + n \\ S_1 &= n + (n-1) + (n-2) + ... + 2 + 1 \\ \hline 2S_1 &= \underbrace{(n+1) + (n+1) + ... + (n+1)}_{n-szer} \end{aligned}$$

Adjuk össze oszloponként a két összeget

Tehát $2S_1 = n(n+1)$ ahonnan $S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$

Másképpen: $(k+1)^2 - k^2 = 2k + 1$ és összegezzük mind a két oldalt 1-től n-ig

Így kapjuk: $\sum_{k=1}^{n} \left((k+1)^2 - k^2 \right) = 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$ vagyis $(n+1)^2 - 1 = 2 \cdot S_1 + n$ ahonnan $S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$ adódik.

2) Számítsuk ki az $S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2$ összeget.

Megoldás: $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$ és összegezzük mind a két oldalt 1-től n-ig.

Így kapjuk: $\sum_{k=1}^{n} \left((k+1)^3 - k^3 \right) = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + n$ ahonnan $(n+1)^3 - 1 = 3S_2 + 3S_1 + n$ és innen számolásokkal kapjuk, hogy $S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3) Számítsuk ki az $S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3$ összeget.

Megoldás: A Newton binomiális képlete alapján $(k+1)^4 - k^4 = 6k^3 + 10k^2 + 6k + 1$ és összegezzük mind a két oldalt 1-től n-ig. Ennek nyomán azt kapjuk, hogy :

$(n+1)^4 - 1 = 6S_3 + 10S_2 + 6S_1 + n$ ahonnan számolással adódik, hogy $S_3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$.

Általánosítás:

Az $(n+1)^{k+1} = n^{k+1} + C_{k+1}^1 n^k + C_{k+1}^2 n^{k-1} + ... + C_{k+1}^k n + C_{k+1}^{k+1}$ binomiális összegből összegzéssel megkapható: $(n+1)^{k+1} = 1 + C_{k+1}^1 S_k + C_{k+1}^2 S_{k-1} + ... + C_{k+1}^k S_1 + n$

Alkalmazások:

3) Számítsuk ki: $S = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + ... + n(n+1) = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)$

Megoldás: Mivel $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n}\left(k^2+k\right) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k = S_2 + S_1$ beírva az S_1 és S_2 értékeket kapjuk, hogy $S = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Az előbbiek mintájára igazold:

(1) $S = 1+3+5+...+(2n-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$

(2) $S = 1^2+3^2+5^2+...+(2n-1)^2 = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$

(3) $S = 1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + ... + n(n+1)(n+2) = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$

(4) $S = 1\cdot 4 + 2\cdot 7 + 3\cdot 10 + ... + n(3n+1) = \sum_{k=1}^{n} k(3k+1) = n(n+1)^2$

Összegek kiszámolása elemi törtekre bontással

1) Számítsuk ki: $S = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$

Megoldás: Bontsuk fel $\frac{1}{k(k+1)} \equiv \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1}$ ahol közös nevezőre hozással kapjuk, hogy $\frac{1}{k(k+1)} \equiv \frac{(A+B)k+A}{k(k+1)}$ ahonnan $A+B=0$ és $A=1$, tehát $B=-1$ így felírható, hogy $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Ha most összegezzük mind a két oldalt 1-től n-ig azt kapjuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + ... + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}\ .$$

Alkalmazások:

Az előbbi mintájára igazold, hogy:

(1) $S = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{n}{3n+1}$

(2) $S = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \frac{n}{4n+1}$

(3) $S = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(7k-3)(7k+1)} = \frac{n}{7n+1}$

(4) $S = \sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$

(5) $S = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ =?