Matematikai indukciós feladatok

A bizonyítás menete szimbólikusan így összegezhető:

P(1)

P(k) ⇒ P(k +1)

⇒ P(n) igaz bármely n∈**N** esetén.

A bizonyításnak a "P(k) ⇒ P(k +1)" részét az *indukciós lépésnek* nevezzük; az a feltételezés, hogy P(k) igaz, az *indukció feltétele*.

1)

Bizonyítsuk be, hogy $0+1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ $(n\in\mathbf{N})$.

2)

Bizonyítsuk be teljes indukcióval, hogy

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}\qquad (n\in\mathbf{N}\ \wedge\ n>1).$$

3)

Bizonyítsuk be, hogy

$$1\cdot 4+2\cdot 7+\ldots+n(3n+1)=n(n+1)^2\qquad (n\in\mathbf{N}\ \wedge\ n\geq 1).$$

4)

Bizonyítsuk be teljes indukcióval, hogy

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}\qquad (n\in\mathbf{N}).$$

Bizonyítsuk be teljes indukcióval, hogy

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}\qquad (n\in\mathbf{N}\ \wedge\ n\geq 1).$$

6)

Egy sorozatra $a_1=1$ és $a_n=2a_{n-1}+1$.

Bizonyítsuk be, hogy $a_n=2^n-1$ $(n\in\mathbf{N}\ \wedge\ n\geq 1)$.

7)

Bizonyítsuk be teljes indukcióval, hogy

$$1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3}\qquad (n\in\mathbf{N}\ \wedge\ n\geq 1).$$

8)

Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\qquad (n\in\mathbf{N}\ \wedge\ n\geq 1).$$

9)

Mennyi az $(1+1)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\ \ldots\ \cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)$ $(n\in\mathbf{N}\ \wedge\ n\geq 1)$ szorzat értéke?

10) Bizonyítsuk be, hogy
$6 \mid n^3 - n \qquad (n \in \mathbf{N})$.

11) Bizonyítsuk be, hogy
$6 \mid (n^2+5)\cdot n \qquad (n \in \mathbf{N})$.

12) Bizonyítsuk be, hogy
$5 \mid 2^{4n+1} + 3 \qquad (n \in \mathbf{N})$.

13) Bizonyítsuk be teljes indukcióval, hogy a $46^n - 13^n$ kifejezés osztható 33-mal $(n \in \mathbf{N})$.

14) Bizonyítsuk be, hogy $2^n > n^2$, ha $n > 4$ és $n \in \mathbf{N}$.

15) Bizonyítsuk be, hogy
$3^n > n^3$, ha $n > 3$ és $n \in \mathbf{N}$.

16) Igazoljuk, hogy ha n≥ 1 akkor

$$\frac{3}{1^2\cdot 2^2}+\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+\frac{7}{3^2\cdot 4^2}+\ldots+\frac{2n+1}{n^2\cdot(n+1)^2}=\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$$

17) Igazoljuk, hogy ha n≥ 1 akkor

$$1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot n^2=(-1)^{n-1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

18) Igazoljuk, hogy ha n≥ 1 akkor

$$(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot(2n)=2^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)$$

19) Igazoljuk, hogy ha n≥ 1 akkor

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$$

20) Igazoljuk, hogy a következős számsorozat minden tagja osztható 17-tel:
1003, 10013, 100113, 1001113, …
(Útmutatás: két egymás utáni tag különbsége 90100…00=17×53×10…00)

21) Igazoljuk, hogy ha n≥ 1 akkor:

a) $6 \mid n^3+11n$ b) $27 \mid 10^n+18n-1$ c) $16 \mid 9^{n+1}-8n-9$

d) $9 \mid 5^{2n}+3n-1$ e) $8 \mid 5^n+2\cdot 3^{n-1}+1$ f) $17 \mid 3\cdot 5^{2n+1}+2^{3n+1}$

21) Ha $x_n=(3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n$, akkor $2^n \mid x_n$ minden n≥ 1 esetén.

(Útmutatás: $\left(a^n+b^n\right)\left(a+b\right)=a^{n+1}+b^{n+1}+ab(a^{n-1}+b^{n-1})$)

22) Igazoljuk, hogy ha n≥ 1 akkor

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\ldots\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

23) Igazoljuk, hogy ha n≥ 1 akkor

$$2\sqrt{n+1}-2 < 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}-1$$

24) Igazoljuk, hogy ha n≥ 1 akkor

$$\frac{1}{2\sqrt{1}}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

25) Igazoljuk, hogy ha n≥ 2 akkor

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2} \leq \frac{3}{4}-\frac{1}{n}$$

26) Igazoljuk, hogy ha n≥ 1 akkor

$$\frac{n}{2} < 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n-1} < n$$

27) Igazoljuk, hogy ha n≥ 4 akkor $3^n > 2^n + 7n$

28) Igazoljuk, hogy egy n≥ 3 oldalú konvex sokszög átlóinak a száma

$\frac{n(n-3)}{2}$!

29) Igazoljuk, hogy bármely szabályos háromszög felbontható n>5 darab szabályos háromszögre.