Megoldókulcsok

1. Teszt, 9. osztályos algebra

1. B	6. E	11. E	16. B	21. D
2. B	7. C	12. B	17. C	22. B
3. B	8. D	13. C	18. D	23. E
4. E	9. C	14. C	19. E	24. D
5. E	10. A	15. A	20. E	25. E

2. Teszt, 9. osztályos geometria és trigonometria

1. A	6. C	11. E	16. A	21. D
2. A	7. A	12. C	17. C	22. D
3. A	8. B	13. C	18. C	23. A
4. C	9. D	14. C	19. B	24. D
5. D	10. B	15. A	20. A	25. B

3. Teszt, 10. osztályos algebra

1. E	6. A	11. B	16. B	21. C
2. A	7. C	12. B	17. E	22. B
3. C	8. D	13. B	18. C	23. C
4. D	9. B	14. A	19. A	24. B
5. C	10. C	15. B	20. C	25. D

4. Teszt, 10. osztályos koordinátageometria

1. B	**6. E**	**11. D**	**16. D**	**21. D**
2. A	**7. A**	**12. E**	**17. B**	**22. C**
3. C	**8. C**	**13. C**	**18. C**	**23. D**
4. A	**9. E**	**14. D**	**19. B**	**24. B**
5. B	**10. E**	**15. C**	**20. C**	**25. A**

5. Teszt, 11. osztályos algebra

1. E	**6. C**	**11. C**	**16. C**	**21. E**
2. A	**7. A**	**12. D**	**17. D**	**22. A**
3. B	**8. D**	**13. B**	**18. C**	**23. D**
4. D	**9. A**	**14. A**	**19. C**	**24. A**
5. C	**10. D**	**15. B**	**20. D**	**25. E**

6. Teszt, 11. osztályos analízis

1. C	**6. B**	**11. A**	**16. B**	**21. A**
2. D	**7. A**	**12. B**	**17. E**	**22. A**
3. B	**8. A**	**13. A**	**18. A**	**23. D**
4. B	**9. A**	**14. C**	**19. C**	**24. B**
5. B	**10. A**	**15. D**	**20. C**	**25. C**

7. Teszt, 12. osztályos algebra

1. E	6. A	11. D	16. C	21. E
2. A	7. E	12. C	17. A	22. B
3. C	8. D	13. E	18. E	23. C
4. A	9. B	14. C	19. A	24. C
5. B	10. C	15. B	20. B	25. A

8. Teszt, 12. osztályos analízis

1. A	6. C	11. C	16. E	21. B
2. D	7. D	12. C	17. D	22. D
3. D	8. B	13. B	18. D	23. A
4. B	9. A	14. A	19. B	24. A
5. D	10. D	15. D	20. A	25. E

Megoldás

1. Teszt. 9. osztályos algebra

1. Felírható, hogy $7=7,\ 11=7+4,\ 15=7+2\times 4,\ ...,$ $999=7+248\times 4$ vagyis a számhalmaznak éppen 249 tagja van. Másképpen: egy számtani sorozatról van szó, ahol $a_1=7,\ r=4,\ a_n=999$ és ismert, hogy $a_n=a_1+(n-1)r$, ahonnan $n=\dfrac{a_n-a_1}{r}+1$ és beírva az $a_n,\ a_1,\ r$ értékeket, $n=249$ adódik. Ezért a (B) válasz a helyes.

2. Elosztva 1-et 7-tel kapjuk, hogy $\dfrac{1}{7}=0,(142857)$ vagyis a tizedes vessző utáni számok 6-os csoportban ismétlődnek. És mivel $2012=335\times 6+2$, ezért a 2012. helye a 4-es számjegy áll. Így a helyes válasz a (B).

3. Felírható, hogy
$$A^2=\left(\sqrt{9-\sqrt{80}}-\sqrt{9+\sqrt{80}}\right)^2=18-2\times\sqrt{9-\sqrt{80}}\times\sqrt{9+\sqrt{80}}=16.$$
De mivel $\sqrt{9-\sqrt{80}}<\sqrt{9+\sqrt{80}}$, ezért $A<0$ és így az $A^2=16$ alapján csak $A=-4$ felel meg. Másképpen:
$$\sqrt{9-\sqrt{80}}=\sqrt{5+4-2\sqrt{5\times 4}}=\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}=\left|\sqrt{5}-2\right|=\sqrt{5}-2.$$
Hasonlóan írható, hogy $\sqrt{9+\sqrt{80}}=\sqrt{5}+2$, ezért $A=-4$. Így a helyes válasz a (B).

4. Legyen $x\in A$, ezért $x=\dfrac{n+1}{n}$ alakú, ahol $n\in\{1,\ 3,\ 5,\ ...,\ 99\}$ ami éppen 50 érték. Ha $x\in B$, akkor $\left|\dfrac{n+1}{n}-1\right|<\dfrac{1}{10}$, vagyis $n>10$, vagyis az $n\in\{1,\ 3,\ 5,\ ...,\ 99\}$ halmazból nem felelnek meg 1, 3, 5, 7 és 9. Ezek szerint a B halmaz elemeinek a száma 50- 5= 45. Így hát a helyes válasz az (E).

5. Az egészrész értelmezése szerint rendre felírható, hogy: $\left[\frac{1}{2}\right]=0$,

$\left[\frac{2}{2}\right]=\left[\frac{3}{2}\right]=1$, $\left[\frac{4}{2}\right]=\left[\frac{5}{2}\right]=2,\ldots,$ $\left[\frac{2012}{2}\right]=\left[\frac{2013}{2}\right]=1006$ ezért a kiszámítandó összeg $1+1+2+2+3+3+...+1006+1006=$ $=(1+1006)+(2+1005)+...+(1005+2)+(1006+1)=1006\times1007$. Így hát a helyes válasz az (E).

6. Ha $x^2+y^2-4x+6y+m>0,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$, akkor $x^2+y^2-4x+6y+m>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ esetén is, így az x-ben másodfokú egyenlet diszkriminánsa negatív kell legyen, az az $\Delta_x<0$, vagyis $y^2+6y+m-4>0,\ \forall y\in R$ ahol most az szükséges, hogy az y-ban másodfokú egyenlet diszkriminánsa legyen negatív, vagyis $13-m<0$, tehát $m\in(13,+\infty)$, ami azt jelenti, hogy az (E) válasz a helyes. Másképpen: $x^2+y^2-4x+6y+m>0\Leftrightarrow\ (x-2)^2+(y-3)^2+m-13>0$ és ha $x=2,y=3\Rightarrow m>13$

7. Ha $a\in R_+^*$, akkor $a+\frac{1}{a}\geq2\Leftrightarrow(a-1)^2\geq0$, ezért $E(x,y)=x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}\geq4$, vagyis min $E(x\ ,y)$= 4, így a helyes válasz (C).

8. Adott tehát, hogy $a_1=33,\ \mathrm{S}_{10}=420$, ahonnan $S_{10}=\frac{(a_1+a_{10})\cdot10}{2}=$ $=5\times(2a_1+9r)=5\times(66+9r)=420$, így hát r=*2*. Ezért a helyes válasz a (D).

9. A számtani haladványban $a_1=2,\ r=5$, így hát $a_n=a_1+(n-1)r=$ $=2+(n-1)5=5n-3$ vagyis ha x az n-edik tag, akkor $x=5n-3$, akkor $2+7+12+\ldots+x=245\Leftrightarrow\frac{(2+5n-3)n}{2}=245$ ahonnan n= *10*, ezért $x=\ 5\times10-3=\ 47$. Így a helyes válasz a (C).

10. Felírható, hogy $2x_4 + 3x_{21} = 13 \Leftrightarrow 5x_1 + 66r = 13$, másfelől pedig $x_7 + 4x_{16} = 5x_1 + 66r = 13$. Tehát a helyes válasz az (A).

11. Igaz tehát, hogy $a_3 = a_1 + 2r = 7$, és $S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 =$ $= 5a_1 + 10r = 5(a_1 + 2r) = 35$. Tehát a helyes válasz az (E).

12. Igaz tehát, hogy $b_3 = b_1 q^2 = 3$, ezért $b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 = b_1^5 q^{10} = \left(b_1 q^2\right)^5 =$ $= 3^5 = 243$. Így hát a helyes válasz a (B).

13. Szükséges tehát, hogy $f(m-4) = m+11 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (m+3)(m-4) + 2m + 7 = m + 11 \Leftrightarrow m^2 - 16 = 0$ ahonnan $m = \pm 4$ tehát a helyes válasz a (C).

14. Legyen tehát $\dfrac{2x}{x^2+1} = y$ vagyis $yx^2 - 2x + y = 0$ és $x \in R$, ezért $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 4 - 4m^2 \geq 0 \Leftrightarrow m \in \left[-1,1\right]$, vagyis a helyes válasz a (C).

15. Ez akkor igaz, ha $-2x^2 + mx < 1 \Leftrightarrow 2x^2 - mx + 1 > 0\ \forall x \in R$, ami akkor igaz, ha $\Delta < 0 \Leftrightarrow m^2 - 8 < 0 \Leftrightarrow m \in \left(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$, ezért a helyes válasz az (A).

16. A csúcs koordinátái $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{m+1}{m}$ és $y = -\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{1}{m}$. Kiküszöbölve az *m*-et kapjuk, hogy $y = x + 1$, ezért a helyes válasz a (B).

17. Az f csak akkor szigorúan növekvő a $[-1,1]$ intervallumon, ha a parabola csúcsa a $[-1,1]$ intervallum bal oldalán helyezkedik el, tehát $-\dfrac{b}{2a} < -1 \Leftrightarrow \dfrac{m}{2} < -1 \Leftrightarrow m \in (-\infty, -2)$, vagyis a helyes válasz a (C).

18. A két parabola akkor érinti egymást, ha $ax^2 - (a+2)x - 1 =$ $= x^2 - x - a$, vagyis az $(a-1)x^2 - (a+1)x + a - 1 = 0$ egyenletnek dupla gyöke van, tehát $\Delta = 0 \Leftrightarrow 3a^2 - 10a + 3 = 0$, ahonnan $a = 3$ vagy $a = \dfrac{1}{3}$, ezért a helyes válasz a (D).

19. Legyen $|x| = y$, ezért $y^2 - 4y + 3 = 0$, így $y = 1$ és $y = 3$, ezért tehát $|x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$ illetve $|x| = 3 \Leftrightarrow x = \pm 3$. Tehát az egyenletnek 4 valós megoldása van, így a helyes válasz az (E).

20. A tört akkor értelmezett, ha $m \neq 0$ és $mx^2 - mx + 1 \neq 0$ vagy ha $m = 0$ és $x \in R$. De $mx^2 - mx + 1 \neq 0$ ha $\Delta < 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m < 0$, tehát $m \in (0,4)$ továbbá $m = 0$ is jó, tehát $m \in [0,4)$, ami azt jelenti, hogy a helyes válasz az (E).

21. Felírható, hogy $\left[\frac{x+4}{2}\right] = 2 \Leftrightarrow \left[\frac{x}{2} + 2\right] = 2 \Leftrightarrow \left[\frac{x}{2}\right] + 2 = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\frac{x}{2}\right] = 0$ ahonnan $x \in [0,2)$, ezért a helyes válasz a (D).

22. Felírható, hogy $E(n) = n^3 + 3n^2 + 2n \Leftrightarrow E(n) = n(n+1)(n+2)$ ez három egymás utáni szám szorzata, ami osztható 3-mal, de van benne két egymás utáni szám szorzata is, ami osztható 2-vel, ezért a kifejezés osztható a szorzattal, vagyis 6-tal is. Így a helyes válasz a (B).

23. A monotonítást vizsgálva felírható, hogy

$a_{n+1} - a_n = \frac{n+2}{3n+4} - \frac{n+1}{3n+1} = \frac{-2}{(3n+4)(3n+1)} < 0$, ami azt jelenti,

hogy a sorozat szigorúan csökkenő, ezért a helyes válasz az (E).

24. Ha $x + 2 > 0$, akkor $|x-3| = 1$, ahonnan $x - 3 = \pm 1$, így $x \in \{4,2\}$.
Ha $x + 2 < 0$, akkor $|x-3| = -1$aninek nincs megoldása, ha pedig $x + 2 = 0$, akkor ez megfelel, mivel mindkét oldal 0 lesz. Tehát a helyes válasz a (D).

25. Rendre felírható, hogy $f(4k) = u(2^{4k}) = u(16^k) = 6$, valamint
$f(4k+1) = u(2^{4k+1}) = u(2 \cdot 16^k) = 2$,
$f(4k+2) = u(2^{4k+2}) = u(4 \cdot 16^k) = 4$,
$f(4k+3) = u(2^{4k+3}) = u(8 \cdot 16^k) = 6$, tehát $f(n+4) = f(n)$
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, ami azt jelenti, hogy az f függvény főperiódusa $T_0 = 4$.
Tehát, a helyes válasz a (D).

2. Teszt. 9. osztályos mértan és trigonometria

1. Felírható, hogy $a_n = 68 + 20\cdot(n-1)$, továbbá a szögek összege éppen $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2} = (n-2)\cdot 180$, ahonnan $5n^2 - 61n + 180 = 0$, ahonnan egyetlen egész gyök az $n = 5$. Ezért hát a helyes válasz az (A).
2. Rajzoljuk meg a négyzet AC és BD átlóit, amelyek O-ban metszik egymást. Legyen a négyzet oldala *a*, és *PD* =*x*. Ekkor a PAC és PBD háromszögekben írjuk fel az oldalfelező hosszát:
$m_a^2 = \dfrac{2(12^2 + 65^2) - 2a^2}{4}$ valamint $m_a^2 = \dfrac{2(x^2 + 20^2) - 2a^2}{4}$,
ahonnan $144+4225=x^2+400$, ezért $x^2=3969$, ahonnan $x=63$. Tehát a helyes válasz az (A).
3. Az ABC háromszög oldalait jelölje a, b, c és az ezekhez tartozó magasságokat h_1 ,h_2 ,h_3. Akkor a háromszög területét három féle képpen felírva kapjuk, hogy: $ah_1 = bh_2 = ch_3 \Leftrightarrow 6a = 10b = h_3 c$ ahonnan $a = \dfrac{h_3 c}{6}$, $b = \dfrac{h_3 c}{10}$. De $b + c > a \Leftrightarrow$ $\dfrac{h_3 c}{10} + c > \dfrac{h_3 c}{6}$ ahonnan $15 > h_3$, ezért a helyes válasz az (A).
4. A koszinusz tétel alapján $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a^2 = 25 - 12 = 13 \Leftrightarrow a = \sqrt{13}$, tehát $K = 7 + \sqrt{13}$, ezért a helyes válasz a (C).
5. Ismert, hogy $R = \dfrac{abc}{4T}$, $T = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, ahol $p = \dfrac{a+b+c}{2} = 10$, így $T = 10\sqrt{3}$ és $R = \dfrac{7}{\sqrt{3}}$, ezért a helyes válasz a (D).
6. Alkalmazzuk a koszinusz tételt az ABD és ADC háromszögekben: $BD^2 = 3^2 + 2^2 - 12\cos\dfrac{A}{2}$, $DC^2 = 4^2 + 2^2 - 16\cos\dfrac{A}{2}$ és a szögfelező

tétel alapján $\frac{BD^2}{DC^2}=\frac{3^2}{4^2}$, ahonnan $\cos\frac{A}{2}=\frac{7}{12}$, így a helyes válasz a (C).

7. Két vektor skaláris szorzata alapján

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos\left(CAB\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4\cdot 4\cdot\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}=16$,

ezért a helyes válasz az (A).

8. A háromszög szabály és Pitagorász tétele alapján
$\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}\right|=\left|\overrightarrow{AM}\right|=\sqrt{10^2+3^2}=\sqrt{109}$, ezért a helyes válasz a (B).

9. Felírható, hogy $\overrightarrow{AB}=(2-1,3-2)=(1,1)=\vec{i}+\vec{j}$ továbbá
$\overrightarrow{BC}=(3-2,n-3)=(1,n-3)=\vec{i}+(n-3)\vec{j}$ ahonnan
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=n-2=0$, vagyis $n=2$, vagyis a helyes válasz a (D).

10. Felírhatjuk, hogy: $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PA},\ \overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PB},\ \overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PC}$,
$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PD}$ ahonnan $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=$
$=4\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$ (1). Legyenek rendre E illetve F az AB illetve CD húrok felező pontjai. Ekkor felírható, hogy
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OE},\ \overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OF}$ ahonnan felírható, hogy
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF})=2\overrightarrow{OP}$ (2). Az (1) és (2) alapján $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{OP}$, vagyis a helyes válasz a (B).

11. Felírható, hogy $\left|\bar{a}^2-\bar{b}^2\right|=\left|1-4\right|=3$ de ugyanakkor

$3=\left|\bar{a}^2-\bar{b}^2\right|=\left|\bar{a}-\bar{b}\right|\left|\bar{a}+\bar{b}\right|=\sqrt{3}\left|\bar{a}-\bar{b}\right|$ tehát $\left|\bar{a}-\bar{b}\right|=\sqrt{3}$ ezért a helyes válasz az (E).

12. A pótszög képlet alapján felírható $\sin x=\cos(90°-x)$, ezért
$A=\frac{\cos 90°+\cos 89°+...+\cos 0°}{\cos 0°+\cos 1°+...+\cos 90°}=1$, ezért a helyes válasz a (C).

13. Felírható, hogy $T=tg1°\cdot tg2°\cdot tg3°\cdot...\cdot tg89°=$

$$=\frac{\sin 1^\circ \cdot \sin 2^\circ \cdot \ldots \cdot \sin 88^\circ \cdot \sin 89^\circ}{\cos 1^\circ \cdot \cos 2^\circ \cdot \ldots \cdot \cos 88^\circ \cdot \cos 89^\circ}$$ és a $\sin x = \cos(90^\circ - x)$

pótszögképlet alapján $T = \frac{\cos 89^\circ \cdot \cos 88^\circ \cdot \ldots \cdot \cos 2^\circ \cdot \cos 1^\circ}{\cos 1^\circ \cdot \cos 2^\circ \cdot \ldots \cdot \cos 88^\circ \cdot \cos 89^\circ} = 1$,

ezért a helyes válasz a (C).

14. Mivel $\sin^2 x,\ \cos^2 x \in [0,1]$, ezért $S = \sin^{2012} x + \cos^{2012} x \le$ $\le \sin^2 x + \cos^2 x = 1$, ezért a helyes válasz a (C).

15. Felírható, hogy $E = \frac{\operatorname{tg}\alpha + 4\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha - 3\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + 4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - 3\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} =$

$$= \frac{\sin^2\alpha + 4\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha - 3\sin^2\alpha} = \frac{1 + 3\cos^2\alpha}{-3 + 4\cos^2\alpha} = \frac{1 + 3\cdot\frac{1}{9}}{-3 + 4\cdot\frac{1}{9}} = -\frac{12}{23}$$, ezért a

helyes válasz a (C).

16. A szinusz tétel alapján $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$, ahonnan

$\sin A = \frac{a}{2R},\ \sin B = \frac{b}{2R},\ \sin C = \frac{c}{2R}$, ezért

$\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C} \Leftrightarrow a = \frac{b + c}{\cos B + \cos C}$, most pedig a koszinusz

tétel alapján kapjuk, hogy $\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b} = b + c$

ahonnan $(b+c)(a^2 - bc) = b^3 + c^3 \Leftrightarrow a^2 - bc = b^2 - bc + c^2$ vagyis

$a^2 = b^2 + c^2$, ami azt jelenti, hogy a háromszög derékszögű, vagyis a helyes válasz az (A).

17. A koszinusz tétel alapján $b\cos C - c\cos B = \frac{b^2 - c^2}{a} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - c^2 - (a^2 + c^2 - b^2) = 2(b^2 - c^2)$ vagyis

$2(b^2 - c^2) = 2(b^2 - c^2)$, ami azt jelenti, hogy a háromszög

általános, ezért a helyes válasz a (C).

18. A szinusz tétel alapján $\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C = \dfrac{abc}{8R^3}$ de $abc = 4TR$ és $T = pr$, ahonnan $\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C = \dfrac{pr}{2R^2}$, ezért a helyes válasz a (C).

19. Ha mind a két oldal tangensét vesszük, akkor $x = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}$ alapján $tgx = tg(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}) = \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 1$ vagyis $x = \dfrac{\pi}{4}$, így a helyes válasz a (B).

20. Csoportosítsuk az első tagot az utolsóval és a másodikat a harmadikkal: $2\cos 90^\circ \cdot \cos 50^\circ + 2\cos 90^\circ \cos 20^\circ = 0$, ezért a helyes válasz az (A).

21. Az MAC háromszögben $\overrightarrow{MO} = \dfrac{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}}{2}$, az MBD háromszögben pedig $\overrightarrow{MO} = \dfrac{\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}}{2}$. A két összefüggésből pedig $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$, ezért a helyes válasz a (D).

22. Számítsuk ki rendre a négy oldal iránytényezőjét: $m_{AB} = \dfrac{1}{3}$, $m_{BC} = -\dfrac{1}{2}$, $m_{CD} = \dfrac{1}{3}$, $m_{DA} = -\dfrac{1}{2}$. Mivel a szemben fekvő oldalak iránytényezői egyenlők, ezért $AB \parallel CD$, $BC \parallel DA$ vagyis az ABCD négyszög paralelogramma. Tehát a (D) válasz a helyes.

23. Az egyenlet így is írható: $2x^2 - 2xy - xy + y^2 + x - y = 0$ vagyis $2x(x-y) - y(x-y) + (x-y) = 0 \Leftrightarrow (x-y)(2x-y+1) = 0$ ahonnan $x - y = 0$ vagy $2x - y + 1 = 0$ és a két egyenes metsző, mert $\dfrac{1}{2} \neq \dfrac{-1}{-1}$ így a helyes válasz az (A).

24. Mivel $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, ezért harmadik hatványra emelve mindét oldalt kapjuk, hogy

$\sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x) = 1$ vagyis
$\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x$, ami azt jelenti, hogy a helyes válasz a (D).

25. Legyen O a BC oldalfelező pontja. Ekkor $R = \frac{a}{2}$, továbbá $b^2 + c^2 = a^2$. Ezért $a^2 + b^2 + c^2 = 2a^2 = 8R^2$, ezért a helyes válasz a (B).

3. Teszt. 10. osztályos algebra

1. Feltételezzük, hogy *a* racionális szám. Ekkor $a = \log_3 2 = \frac{p}{q}$ ahol *p*, *q* pozitív egész számok. Így hát $2 = 3^{\frac{p}{q}} \Leftrightarrow 2^q = 3^p$ és ezért $2|3$ vagy $3|2$ ami lehetetlen. Tehát a helyes válasz az (E).
2. Igazoljuk, hogy $\log_2 3 > \frac{3}{2} > \log_3 4 \Leftrightarrow 3 > 2^{\frac{3}{2}}$ és $3^{\frac{3}{2}} > 4$ vagyis $9 > 8$ és $27 > 16$, ezért a helyes válasz az (A).
3. Mivel $i^4 = 1$ és az $(i^4 - 1) = 0$ tag szerepel a számlálóban levő szorzatban, ezért a tört értéke 0, így a helyes válasz a (C).
4. Mivel $a + \frac{1}{a} = -1$, ezért $a^2 + a + 1 = 0$, így $a^3 = 1$, ezért $a^{2012} = \frac{a^{2013}}{a} = \frac{1}{a}$, tehát $\frac{1}{a^{2012}} = a$, így hát $a^{2012} + \frac{1}{a^{2012}} = a + \frac{1}{a} = -1$ ami azt jelenti, hogy a helyes válasz az (A).
5. Ha $y \in \mathbb{R}$ és *y* < *0*, akkor nem létezik $x \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $f(x) = |x-1| + |x+1| = y$, ezért a függvény nem szürjektív. Továbbá vegyük észre, hogy $f(0) = |-1| + |1| = 2$ és $f(1) = 0 + 2 = 2$ de $0 \neq 1$ és $f(0) = f(1)$, ezért a függvény nem injektív, tehát a helyes válasz a (C).

6. Válasszuk rendre az $x=2$ és $x=\dfrac{1}{2}$ értékeket. Erre kapjuk, hogy $2f(2)-3f\left(\dfrac{1}{2}\right)=16$ és $2f\left(\dfrac{1}{2}\right)-3f(2)=1$ ahonnan $f(2)=-7$, ezért a helyes válasz az (A).

7. Mivel $f^2(x)=2x+2\sqrt{x^2-4(\sqrt{x-1})^2}=2x+\sqrt{(2-x)^2}=4$ ezért $f(x)=2$ minden $x\in[1,2]$ esetén (-2 nem lehet), így a helyes válasz a (C).

8. Felírható, hogy $E(x)=\left|x-|x-1|\right|=|x-(1-x)|=|2x-1|=1-2x$ tehát a helyes válasz a (D).

9. Felírható, hogy $(x+2)\sqrt{x-1}=0$ ahonnan *x*= *-2* vagy *x*= *1*, de csak ez utóbbi felel meg, amelyre az *y* értéke csak *2*, így a helyes válasz a (B).

10. Felírható, hogy $\left(\dfrac{12}{13}\right)^{x^2}+\left(\dfrac{5}{13}\right)^{x^2}=1$. A bal oldali függvény szigorúan csökkenő, a jobboldali állandó, így ha van megoldás akkor csak egyetlen x^2 van amelyre az egyenlőség fennáll, és látható, hogy $x^2=2$ megfelel, ezért az összes megoldás az $x=\pm\sqrt{2}$, így a helyes válasz a (C).

11. Felírható, hogy $\lg x^2=\lg(5x-4)$ ahonnan $x^2-5x+4=0$ ahonnan $x=1$ vagy $x=4$, de $x=1$ nem felel meg, mert erre $\lg(5x-4)=0$. Tehát a helyes válasz a (B).

12. A szorzat egyik tagja a $\lg(tg45°)=\lg 1=0$, ezért a szorzat értéke 0, így a helyes válasz a (B).

13. Ha logaritmáljuk mind a két oldalt felírható, hogy $\lg E=(\lg b-\lg c)\lg a+(\lg c-\lg a)\lg b+(\lg a-\lg b)\lg c=0$ ezért E=1, így a helyes válasz a (B).

14. Felírható, hogy $x+1\in\{1,2,3\}$ ahonnan $x\in\{0,1,2\}$ de $x\neq 0$ ezért két *x* megoldás van. Hasonlóan $y-1\in\{0,1,2,3,4\}$ ahonnan $y\in\{1,2,3,4,5\}$ ami öt megoldás, ezért az (*x*, *y*) megoldások száma 10. Tehát a helyes válasz az (A).

15. Felírható, hogy $E(n)=C_{2n}^{n}\in\mathbb{N}$, ezért a helyes válasz a (B).

16. Ellenőrizhető, hogy $\frac{C_2^1}{C_3^2}=\frac{C_2^1}{C_3^2}=...=\frac{C_{2012}^{1006}}{C_{2011}^{1006}}=2$ ezért *A*= *2*, és

$B=2^{2012}$ így hát $A^{2012}=B$, vagyis a helyes válasz a (B).

17. A faktoriális értelmezése alapján belátható, hogy ha $n\geq 5$, akkor az $n!$ utolsó számjegye 0. De mivel az 1!+2!+3!+4!=33 utolsó számjegye 3, ezért az $S=1!+2!+3!+...+n!$ szám utolsó számjegye is 3, tehát a helyes válasz a (D).

18. Az általános tag képlete $T_{k+1}=C_{2012}^{k}2^{\frac{2012-k}{3}}3^{\frac{k}{2}}$ és ez akkor racionális, ha $\frac{2012-k}{3}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\frac{k-2}{3}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow k\in\{2,5,8,...,2012\}$ valamint $\frac{k}{2}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k\in\{0,2,4,...,2012\}$ és a két halmaz metszete $\{2,8,14,...,2012\}$ amelynek éppen 336 eleme van tehát ennyi tag racionális, és 2013-336=1677 tag irracionális, ezért a helyes válasz a (C).

19. Mivel $(2-\sqrt{3})^n=a-b\sqrt{3}$, ezért $(2+\sqrt{3})^n=a+b\sqrt{3}$ így hát

$a^2-3b^2=\left[(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})\right]^n=1$, ezért a helyes válasz az (A).

20. Mivel $E=(2+\sqrt{3})^{2012}+(2-\sqrt{3})^{2012}=a+b\sqrt{3}+a-b\sqrt{3}=2a$, ezért a helyes válasz a (C).

21. Mivel $f(x)=\sqrt{-x^2+5x}\geq 0$ és az egyenlőség x= 0 vagy x= 5 esetén áll fenn, ezért a függvénynek van minimuma. Másfelől a $g(x)=-x^2+5x$ függvénynek maximuma van, amit $x=-\frac{b}{2a}=\frac{5}{2}$ értékre vesz fel. Tehát a helyes válasz a (C).

22. A baloldalon szereplő függvény szigorúan növekvő, a jobboldalon szereplő függvény szigorúan csökkenő, ezért ha az egyenletnek van megoldása, akkor legfeljebb csak egy megoldása van. És mivel x=1 éppen megoldás, ezért a feladatnak pontosan egy megoldása van. Így hát a helyes válasz a (B).

23. Jelölje $y=\sqrt{(2+\sqrt{3})^x}$, ekkor $\sqrt{(2-\sqrt{3})^x}=\frac{1}{y}$, ezért az egyenlet így alakul: $y^2-4y+1=0$ amelynek a gyökei $y_{1,2}=2\pm\sqrt{3}$, ezért

$\sqrt{(2+\sqrt{3})^x} = 2+\sqrt{3}$ ahonnan x= 2, illetve

$\sqrt{(2+\sqrt{3})^x} = 2-\sqrt{3} = (2+\sqrt{3})^{-1}$, ahonnan x= -2. Tehát az egyenletnek két megoldása van, így a helyes válasz a (C).

24. $E = (1+i)^{2012} + (1-i)^{2012} = \left[(1+i)^2\right]^{1006} + \left[(1-i)^2\right]^{1006} =$

$= (2i)^{1006} + (-2i)^{1006} = 2(2i)^{1006} = 2^{1007}(-1)^{503} = -2^{1007}$, ezért a helyes válasz a (B).

25. A képezhető négy jegyű számok száma V_8^4 , és ezek közül a 0-val kezdődőek száma V_7^3, ezért a válasz a $V_8^4 - V_7^3$ ani azt jelenti, hogy a helyes válasz a (D).

4. Teszt. 10. osztályos koordinátageometria

1. A BC oldal M felező pontjának a koordinátái $M(1,1)$. Ha $A'(a,b)$ a szimmetrikus pont, akkor $1 = \frac{-2+a}{2}$ és $1 = \frac{1+b}{2}$ ahonnan $A'(-4,1)$ így hát a helyes válasz a (B).

2. Tehát $d_1 \parallel d_2$, ezért $\frac{m}{12} = \frac{3}{-2}$ ahonnan *m*= *-18*, így a helyes válasz az (A).

3. Az *AC* szakasz iránytényezője $m_{AC} = -1$, ezért a *B*-ből húzott magasság egyenlete $y-3 = 1(x-10) \Leftrightarrow x-y-7=0$ vagyis a helyes válasz a (C).

4. Az AC oldal iránytényezője $m_{AC} = -\frac{1}{7}$, az AB oldal iránytényezője pedig $m_{AB} = 7$, ezért AC és AB merőlegesek egymásra, vagyis az ABC háromszög A-ban derékszögű, ezért a körülírt kör M középpontja a BC átfogó M felezőpontja, vagyis $M(2,3)$. Így a kérdéses sugár éppen az MA szakasz hossza, vagyis $MA = \sqrt{36+64} = 10$ Ezért a helyes válasz az (A).

5. Felírható, hogy $\overrightarrow{AB}=(3,a-8),\ \overrightarrow{BC}=(b+2,1-a),$
$\overrightarrow{AC}=(b+5,-7)$, így $(3,a-8)+3(b+2,1-a)+5(b+5,-7)=(0,0)$
ahonnan $b=-\dfrac{17}{4}$ és *a= -20* ,ezért a helyes válasz a (B).

6. Felírható, hogy $\cos\alpha=\dfrac{2-a}{\sqrt{a^2+2}\sqrt{2}}$, és ez a kifejezés negatív kell legyen, ezért *a >2*, így a helyes válasz az (E).

7. A $(2,3)$ és $(4,-1)$ pontok által meghatározott szakasz M felezőpontjának a koordinátái M(3, 1), ezért a hosszabbik átló hossza $2OM=2\sqrt{9+1}=2\sqrt{10}$, így a helyes válasz az (A).

8. A merőlegesség feltétele $\overline{u}\cdot\overline{v}=0 \Leftrightarrow (x\overline{a}+\overline{b})(\overline{a}+2\overline{b})=0$ ahonnan $9x+(2x+1)\overline{a}\overline{b}+32=0$. De $\overline{a}\overline{b}=3\cdot4\cdot\cos60^\circ=6$, így *21x= -38*, ezért $x=-\dfrac{38}{21}$, így a helyes válasz a (C).

9. A modulusok egyenlősége alapján
$(m+5)^2+(2m+1)^2=(2m-3)^2+(m-3)^2$ ahonnan $m=-\dfrac{1}{4}$, így a helyes válasz az (E).

10. A merőlegesség feltétele $\overline{u}\overline{v}=0 \Leftrightarrow 3(m+1)+m^2=0$ és mivel a másodfokú egyenletnek nincs valós gyöke, ezért a helyes válasz az (E).

11. A kollinearítás feltétele $\overline{u}=k\overline{v} \Leftrightarrow m+2=k(m-5)$ és $2=3k$ ahonnan *m= -16,* ezért a helyes válasz a (D).

12. A súlypont koordinátái
$x_G=\dfrac{m+1+2m+2n+1}{3}=0,\ y_G=\dfrac{n+m+2+m}{3}=0$ ahonnan
$m=0,\ n=-1$, ezért a helyes válasz az (E).

13. A kollinearítás feltétele $\begin{vmatrix} m-2 & 7 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 4 & -3 & 1\end{vmatrix}=0$ ahonnan m= 2, ezért a helyes válasz a (C).

14. Kiszámítva az oldalak iránytényezőit felírható, hogy $m_{AB} = m_{CD} = 0$ valamint $m_{AD} \neq m_{BC}$ ami azt jelenti, hogy az *ABCD* négyszög trapéz, ezért a helyes válasz a (D).

15. Legyen *D*(*a*, *b*). Ekkor szükséges, hogy $m_{AB} = m_{CD}$, $m_{BC} = m_{AD}$ vagyis $\frac{2}{2} = \frac{b-2}{a-2}$ és $\frac{3}{2} = \frac{b-3}{a-2}$ ahonnan *a*= *b*= *0*, vagyis a helyes válasz a (C).

16. Írjuk fel az AB és AC oldalak iránytényezőit: $m_{AB} = \frac{4-3}{m-2} = \frac{1}{m-2}$ illetve $m_{AC} = 0$, így a két oldal merőleges egymásra, ha *m*= *2*. Másképpen: A háromszög csak akkor derékszögű, ha érvényes a Pitagorász tétele: $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow 1+1=(m-2)^2+1+(m-3)^2$ vagyis $m^2-5m+6=0$, ahonnan m= 2, vagy m= 3, de az utóbbi nem felel meg, mert erre A=C lenne. A helyes válasz tehát a (D).

17. Jelölje d_1 illetve d_2 az első illetve a második egyenest. Ha kiszámítjuk az *A* pont távolságát a két egyenestől, akkor ezek a távolságok éppen a téglalap két oldalhosszát adják. Tehát $d(A,d_1) = \frac{|-3+16-3|}{\sqrt{16+9}} = 2$ illetve $d(A,d_2) = \frac{|-4-12-4|}{\sqrt{16+9}} = 4$, ezért tehát a téglalap területe *T*= *8*, így a helyes válasz a (B).

18. A kisalap tehát átmegy az O(0,0) ponton és párhuzamos az $x+y-3=0$ egyenletű egyenessel, ezért a kisalap egyenesének az egyenlete $y-0=-(x-0) \Leftrightarrow x+y=0$ vagyis a helyes válasz a (C).

19. Felírható, hogy $\overrightarrow{OA} = (2,1)$ és $\overrightarrow{OB} = (-2,1)$, továbbá

$$\cos(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = \frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{\left|\overrightarrow{OA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OB}\right|} = \frac{-4+1}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = -\frac{3}{5}$$

, ezért a helyes válasz a (B).

20. Válasszunk egy olyan pontot amelyik rajta van az első egyenesen, például *M*(*4*, *1*). Ekkor számítsuk ki az M pont távolságát a második egyenestől: $d(M,d_2)=\frac{|8+4-11|}{\sqrt{4+16}}=\frac{1}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{10}$, vagyis a helyes válasz a (C).

21. Írjuk fel: $|AB|=\sqrt{2(b-a)^2}=2|b-a|=2(b-a)$,

$|BC|=\sqrt{2(c-b)^2}=2|c-b|=2(c-b)$,

$|CA|=\sqrt{2(a-c)^2}=2|a-c|=2(c-a)$ ezért nyilvánvalóan teljesül, hogy $|AB|+|BC|=|CA|$ ami azt jelenti, hogy A, B, C kollineárisak, ezért a helyes válasz a (D).

22. Számítsuk ki a négy oldal iránytényezőjét:

$m_{AB}=-\frac{3}{2}$, $m_{BC}=\frac{3}{2}$, $m_{CD}=-\frac{3}{2}$, $m_{DA}=\frac{3}{2}$. Ezek alapján következik, hogy ABCD paralelogramma. De mivel $AC\perp BD$, ezért ABCD rombusz. Tehát a helyes válasz a (C).

23. Számítsuk ki a négyszög oldalainak az iránytényezőit:

$m_{AB}=m_{CD}=0$, $m_{AD}=-2\neq 2=m_{BC}$, ami azt jelenti, hogy ABCD trapéz, amelyben a kisalap 2, a nagyalap 6 és a magassága 4 (készíts ábrát!). Ezért a területe 16, így a helyes válasz a (D).

24. Válasszunk két pontot az adott egyenesen, ennek megkeressük az A pontra vonatkozó szimmetrikusait, és összekötve a két pontot, megkapjuk a szimmetrikus egyenest. Legyen tehát B(2, 0) és C(0, -4). Ezek szimmetrikusai az A pontra B’(0,4) illetve C’(2, 8). Ezen a két ponton áthaladó egyenes egyenlete pedig 2x-y+4=0. Ezért a helyes válasz a (B).

25. A szimmetrikus egyenes átmegy a (0, 2) és a (-3, 0) pontokon, ezért a tengelymetszetes alakja $\frac{x}{-3}+\frac{y}{2}=1$, ezért a helyes válasz az (A).

5. Teszt. 11. osztályos algebra

1. Kezdjünk el hatványozni: $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&1\end{pmatrix}$,

$\sigma^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&4&5&1&2\end{pmatrix}$, $\sigma^3=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&5&1&2&3\end{pmatrix}$,

$\sigma^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\sigma^5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = e$, vagyis $A = \{e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4\}$, ami azt jelenti, hogy a helyes válasz az (E).

2. Az alsó sorban sorra meg kell nézzük, hogy mindegyik szám előtt (balra) hány kisebb szám van: az 1 előtt 1006, 2 előtt 0, 3 előtt 1005, 4 előtt 0, 5 előtt 1004,…és így tovább. Összesen tehát az inverziók száma: $1006 + 1005 + \ldots + 3 + 2 + 1 = \frac{1006 \cdot 1007}{2}$, ezért a helyes válasz az (A).

3. Az értelmezés alapján $\left[A,[B,C]\right] = A[B,C] - [B,C]A =$ $= A(BC - CB) - (BC - CB)A = ABC - ACB - BCA + CBA$. Hasonlóan kapjuk, hogy $\left[B,[C,A]\right] = BCA - BAC - CAB + ACB$ és $\left[C,[A,B]\right] = CAB - CBA - ABC + BAC$ és ezt a hármat összeadva kapjuk, hogy $S = \left[A,[B,C]\right] + \left[B,[C,A]\right] + \left[C,[A,B]\right] = O_2$. Ezért tehát a helyes válasz a (B).

4. Felírható, hogy $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \cdot 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$. Indukcióval feltételezzük, hogy $A^n = \begin{pmatrix} x_n & 3 \cdot y_n \\ y_n & x_n \end{pmatrix}$. Bizonyítjuk, hogy $A^{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} & 3 \cdot y_{n+1} \\ y_{n+1} & x_{n+1} \end{pmatrix}$ is igaz. Valóban, $A^{n+1} = A \cdot A^n = \begin{pmatrix} 2x_n + 3y_n & 3x_n + 6y_n \\ x_n + 2y_n & 2x_n + 3y_n \end{pmatrix}$ ahonnan kapjuk, hogy $x_{n+1} = 2x_n + 3y_n$ és $y_{n+1} = x_n + 2y_n$. Tehát minden természetes n esetén az A mátrix $\begin{pmatrix} x & 3y \\ y & x \end{pmatrix}$ alakú, ezért a helyes válasz a (D).

5. Hatványozással kapjuk, hogy

$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & -2ab \\ 2ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix}$, továbbá

$A^3 = A\cdot A^2 = \begin{pmatrix} a^3-3ab^2 & -3ab^2+b^3 \\ 3ab^2-b^3 & a^3-3ab^2 \end{pmatrix}$, továbbá $A^4 = A\cdot A^3 = I_2$, így indukcióval adódik, hogy $A^{4k} = I_2$, ami azt jelenti, hogy a helyes válasz a (C).

6. Felírható, hogy

$\left(X(A)X(B) = (I_2 + aA\right)(I_2 + bA) = I_2 + (a+b)A + abA^2 =$

$= I_2 + (a+b)A + abA = I_2 + (a+b+ab)A = X(a+b+ab)$ ami azt jelenti, hogy a helyes válasz a (C).

7. Legyen $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, így $AX = \begin{pmatrix} -z & -t \\ x & y \end{pmatrix}$ és $XA = \begin{pmatrix} y & -x \\ t & -z \end{pmatrix}$ és az

$AX = XA$ alapján y= -z, t= x, ezért $X = \begin{pmatrix} x & -z \\ z & x \end{pmatrix}$, vagyis a helyes válasz az (A).

8. Mivel $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y+5 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ és

$BA = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x+y \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, ezért az *AB*= *BA* alapján *x=5* és $y \in \mathbb{R}$, így hát a helyes válasz a (D).

9. $M_{a,b}M_{c,d} = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & c & d \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+c & b+d \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{a+c,b+d}$

ami azt jelenti, hogy a helyes válasz az (A).

10. Felírható, hogy $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ezért $A^3 - A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^2 - I_3$ valamint

$A^4 - A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^2 - I_3$. Ezért indukcióval feltételezhető, hogy $A^n - A^{n-2} = A^2 - I_3$, és bizonyítjuk, hogy $A^{n+1} - A^{n-1} = A^2 - I_3$ is igaz. Valóban, $A^{n+1} - A^{n-1} = A(A^n - A^{n-2}) = A(A^2 - I_3) = A^3 - A = A^2 - I_3$. Ezért a helyes válasz a (D).

11. Felírható, hogy $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & 0 \\ 0 & a^2 + bc \end{pmatrix} = (a^2 + bc)I_2$, ezért feltételezzük, hogy $A^{2n} = (a^2 + bc)^n I_2$ és bizonyítjuk, hogy $A^{2n+2} = (a^2 + bc)^{n+1} I_2$. Valóban,
$A^{2n+2} = A^2 A^{2n} = (a^2 + bc)I_2 (a^2 + bc)^n I_2 = (a^2 + bc)^{n+1} I_2$. Tehát a helyes válasz a (C).

12. A trigonometriai képleteket használva felírható, hogy

$$A^2 = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{n} & -\sin\frac{2\pi}{n} \\ \sin\frac{2\pi}{n} & \cos\frac{2\pi}{n} \end{pmatrix},\ A^3 = \begin{pmatrix} \cos\frac{3\pi}{n} & -\sin\frac{3\pi}{n} \\ \sin\frac{3\pi}{n} & \cos\frac{3\pi}{n} \end{pmatrix}, \ldots,$$

$$A^{n-1} = \begin{pmatrix} \cos\frac{(n-1)\pi}{n} & -\sin\frac{(n-1)\pi}{n} \\ \sin\frac{(n-1)\pi}{n} & \cos\frac{(n-1)\pi}{n} \end{pmatrix},\ A^n = \begin{pmatrix} \cos\frac{n\pi}{n} & -\sin\frac{n\pi}{n} \\ \sin\frac{n\pi}{n} & \cos\frac{n\pi}{n} \end{pmatrix} = -I_2$$

és a további hatványokra minden kezdődik elölről. Tehát a halmaznak pontosan n eleme van, ezért a helyes válasz a (D).

13. A determinánsok tulajdonsága szerint $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a+b \\ 1 & a^2 & a^2+b^2 \\ 1 & a^3 & a^3+b^3 \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 1 & a^2 & a^2 \\ 1 & a^3 & a^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^3 & b^3 \end{vmatrix} = ab\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b \\ 1 & a^2 & b^2 \end{vmatrix} = ab(1-a)(a-b)(b-1).$$ És

ez az $a \in \{0,1,b\}$ értékekre nulla, és mivel $b \neq 0, b \neq 1$, ezért ez a halmaz háromelemű, így a helyes válasz a (B).

14. A determinánsok tulajdonságai alapján $\Delta(a,b,c)=\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}=$

$$=\begin{vmatrix} a & b & a+b+c \\ c & a & a+b+c \\ b & c & a+b+c \end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & a & 1 \\ b & c & 1 \end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c-a & a-b & 0 \\ b-a & c-b & 0 \end{vmatrix}=$$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=$

$=\dfrac{1}{2}(a+b+c)((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2)$ ezért $(a+b+c)\Delta(a,b,c)=$

$=\dfrac{1}{2}(a+b+c)^2((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2)\geq 0$ és mivel $a+b+c\neq 0$,

ezért az egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $a=b=c$ ami azt jelenti, hogy a helyes válasz az (A).

15. A determinánsok tulajdonságai alapján

$$\Delta=\begin{vmatrix} a^2 & ab & a^2+ab+b^2 \\ b^2 & a^2 & a^2+ab+b^2 \\ ab & b^2 & a^2+ab+b^2 \end{vmatrix}=(a^2+ab+b^2)\begin{vmatrix} a^2 & ab & 1 \\ b^2 & a^2 & 1 \\ ab & b^2 & 1 \end{vmatrix}=$$

$=(a^2+ab+b^2)\begin{vmatrix} a^2 & ab & 1 \\ b^2-a^2 & a^2-ab & 0 \\ ab-a^2 & b^2-ab & 0 \end{vmatrix}=(a^2+ab+b^2)(a-b)^2\geq 0$, ezért

a helyes válasz a (B).

16. $\det U(a,b)=\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b & b & a+3b \\ b & a & b & a+3b \\ b & b & a & a+3b \\ b & b & b & a+3b \end{vmatrix}=$

$$=(a+3b)\begin{vmatrix} a & b & b & 1 \\ b & a & b & 1 \\ b & b & a & 1 \\ b & b & b & 1 \end{vmatrix}=(a+3b)\begin{vmatrix} b-a & a-b & 0 \\ b-a & 0 & a-b \\ b-a & 0 & 0 \end{vmatrix}=$$

$= (a+3b)(b-a)^3$ és ez pontosan akkor nulla, ha $(a+3b)(b-a)=0$ ami azt jelenti, hogy a helyes válasz a (C).

17. Mivel $\Delta_{fő} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} = -20 \neq 0$, ezért a karakterisztikus determináns 0 kell legyen, vagyis $\Delta_{kar} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -8 & 1 \\ 5 & 2 & m \end{vmatrix} = -20m + 60 = 0$ ahonnan m= 3, ezért a helyes válasz a (D).

18. Ha $\Delta \neq 0$, akkor az egyenletrendszer Cramer rendszer, vagyis kompatibilis és határozott. Ezért szükséges, hogy $\Delta = 0$ legyen, vagyis $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & -2 \\ a & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ ahonnan $a = -1$ adódik. Nézzük meg, hogy erre inkompatibilis-e a rendszer. A következő determináns egy fődetermináns: $\Delta_{fő} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$ ezért a karakterisztikus determináns nem szabad nulla legyen, $\Delta_{kar} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & -4 & 16 \\ -1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -96 \neq 0$.

Tehát a helyes válasz a (C).

19. Ha $\Delta = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & 2m & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2m^2 - 3m + 1$ nem nulla, vagyis $m \neq 1$ és $m \neq \frac{1}{2}$, akkor a rendszer Cramer típusú, ezért kompatibilis és határozott. Ha m=1, akkor az első és harmadik egyenlet alapján 0=1 absurdum, ha pedig $m = \frac{1}{2}$, akkor a második és harmadik egyenlet

alapján 0=1 absurdum adódik. Ha tehát $m \in R \setminus \left\{1, \frac{1}{2}\right\}$, akkor

$\Delta_z = -3m+2$ ezért $z = \frac{-3m+2}{(m-1)(2m-1)}$. Továbbá az

$x+y \geq z \Rightarrow -z \geq z \Rightarrow 2z \leq 0$ ahonnan $z \leq 0 \Leftrightarrow$

$\frac{-3m+2}{(m-1)(2m-1)} \leq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right] \cup (1, +\infty)$ ami azt jelenti, hogy a helyes

válasz a (C).

20. Az S_1 egyenletrendszer $\begin{cases} x-y+z=1 \\ x+y+z=3 \end{cases}$ amit a z függvényében

megoldva kapjuk, hogy $x = 2-z,\ y=1,\ z=z$, ezért

$\min\left\{x^2+y^2+z^2 \,\middle|\, (x,y,z) \in S_1\right\} = \min\left\{2z^2-4z+1\right\} = -\frac{\Delta}{4a} = -1$ ami azt

jelenti, hogy a helyes válasz a (D).

21. Az egyenesek akkor különbözőek, ha az egyenleteik nem

arányosak. Tehát $\frac{1}{-t} = \frac{1}{-1} = \frac{-1}{t}$ vagyis $t \neq 1$, valamint $\frac{1}{3} = \frac{1}{-t} = \frac{-1}{-3}$,

vagyis $t \neq -3$. Akkor összefutók, ha $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -t & -1 & t \\ 3 & -t & -3 \end{vmatrix} = 0$, és ez minden

$t \in \mathbb{R}$ esetén igaz, tehát a helyes válasz az (E).

22. A pontok akkor különbözőek, ha $\lambda \neq 2$, és akkor kollineárisak, ha

$\begin{vmatrix} -1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ ahonnan $\lambda = 2$,ami nem lehet, vagyis a helyes válasz

az (A).

23. Számolásokkal adódik, hogy

$\Delta = a^2c^2 - 2acbd + b^2d^2 = (ac-bd)^2 \geq 0$, egyenlőség akkor igaz, ha

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ (vagyis arányosak, de nem egyenlők). Tehát a helyes válasz a (D).

24. Ha r az állandó különbség, akkor a második sorból kivonjuk az elsőt, illetve a harmadik sorból az elsőt és kapjuk, hogy:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & a_1+r & a_1+2r \\ a_1+3r & a_1+4r & a_1+5r \\ a_1+6r & a_1+7r & a_1+8r \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_1+r & a_1+2r \\ 3r & 3r & 3r \\ a_1+6r & a_1+7r & a_1+8r \end{vmatrix}=$$

$=\begin{vmatrix} a_1 & a_1+r & a_1+2r \\ 3r & 3r & 3r \\ 5r & 5r & 5r \end{vmatrix}=0$, ezért a helyes válasz az (A).

25. Ismert, hogy $\det(X^2)=(\det X)^2$ és $Tr(\alpha A)=\alpha TrA$ valamint az, hogy minden X másodrendű mátrix teljesíti a karakterisztikus egyenletét:

$X^2-TrX\cdot X+\det X\cdot I_2=O_2$. Jelölje $A=\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$. Akkor felírható, hogy:

$X^2=A\Rightarrow \det X^2=\det A\Leftrightarrow \det X=\pm 1$. Ha $\det X=1$, akkor a karakterisztikus egyenlet így alakul: $X^2-TrX\cdot X+\det X\cdot I_2=O_2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow X^2=TrX\cdot X-I_2\Rightarrow TrX^2=Tr(TrX\cdot X-I_2)$ vagyis

$14=(TrX)^2-2\Rightarrow (TrX)^2=16\Leftrightarrow TrX=\pm 4\Rightarrow A=\pm 4X-I_2$ ahonnan

$X=\pm\frac{1}{4}(A+I_2)=\pm\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Ha $\det X=-1$, akkor $14=(TrX)^2+2$ adódik, ahonnan $TrX\notin\mathbb{Z}$, tehát nincs újabb megoldás. Tehát a helyes válasz az (E).

6. Teszt. 11. osztályos analízis

1. A halmaz elemei két részsorozathoz tartoznak, az egyik $1,\ 2,\ 3,\ ...,\ n,\ ...$ a másik pedig $\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ ...,\ \frac{1}{n},\ ...$. Az elsőnek a torlódási pontja $+\infty$, a másodiknak pedig 0, ezért a helyes válasz a (C).

2. A páros és a páratlan indexű tagok más-más sorozathoz tartoznak, pontosabban $a_{2k}=2k$ illetve $a_{2k+1}=(2k+1)^{-1}=\dfrac{1}{2k+1}$ és az elsőnek egyetlen határérték pontja a $+\infty$, a másodiknak pedig a 0, így a helyes válasz a (D).
3. Az erőltetett tényező módszerét alkalmazzuk:
$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1\right]}{3^n\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n}+1\right]}=3$$
, ezért a helyes válasz a (B).
4. Az erőltetett tényező módszerével felírható, hogy
$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-an-b\right)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}-a\right)=b$ és mivel a limesz értéke véges kell legyen, ezért egy határozatlan eset kell fennálljon, vagyis $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}-a\right)=0 \Leftrightarrow a=1$. Így hát $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-an-b\right)=0$ felírható, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)=b$ és a konjugálttal bővítve kapjuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}=\dfrac{1}{2}=b$, ezért a helyes válasz az (A).
5. A fogótételt alkalmazzuk, miszerint felírhatjuk, hogy:
$$a_n=n\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\le b_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\le n\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}=c_n$$
és mivel $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\sqrt{\dfrac{n^2}{n^2+n}}=1=\sqrt{\dfrac{n^2}{n^2+1}}=\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ ezért $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=1$ ami azt jelenti, hogy a helyes válasz a (B).

6. Alkalmazzuk a Stolz-Cézaro féle lemmát. Legyen

$a_n = 2 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{2} + ... + \sqrt[n]{2} - n$ és $b_n = \ln n$. Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n+1]{2} - 1}{\ln(n+1) - \ln n} = \frac{(n+1)(\sqrt[n+1]{2} - 1)}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\ln 2}{\ln e} = \ln 2$ ami azt jelenti,

hogy a helyes válasz a (B).

7. Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{\pi^2}{6} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \frac{\pi^2}{6}$ és $x_{2n} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{(2n)^2} =$

$= \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + ... + \frac{1}{(2n-1)^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{(2n)^2}\right) = y_n + \frac{1}{4} x_{2n}$

tehát $y_n = x_n - \frac{1}{4} x_{2n}$, ezért $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}$, ami azt jelenti, hogy a helyes válasz az (A).

8. Mivel az $a_n = \left(\frac{an+1}{n+2}\right)^n$, $n \geq 1$ általános tagú sorozat konvergens és határértéke nem nulla, ezért $a \neq 0$ és muszáj $a = 1$ legyen, ekkor azonban $a_n = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{-\frac{n+2}{n}} \to e^{-1} = \frac{1}{e}$, így a helyes válasz az (A).

9. Mivel $\left(1 + \sqrt{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$, ezért $\left(1 - \sqrt{2}\right)^n = a_n - b_n\sqrt{2}$ ahonnan

$a_n = \frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n\right]$, és $\mathrm{b}_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n\right]$

ezért $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \sqrt{2} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1 + \left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^n}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^n} = \sqrt{2}$, ezért a helyes válasz az (A).

10. Mivel $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{(m-1)^2x^2+1}}{3x+2}=-1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|m-1||x|\sqrt{1+\dfrac{1}{(m-1)^2x^2}}}{3x+2}=-1$

ezért $-\dfrac{|m-1|}{3}=-1$ ahonnan m= 4 és m= -2, ezért a helyes válasz az (A).

11. Az $f(x)=\dfrac{2|x-1|}{x^2-x+1}$ függvény esetleges szakadási pontja x= 1, ezért csak itt vizsgáljuk a folytonosságot. $f(1-0)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\dfrac{-2(x-1)}{x^2-x+1}=0$ és $f(1+0)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\dfrac{2(x-1)}{x^2-x+1}=0$ valamint $f(1)=0$. Ezért tehát az f függvény az $x=1$ pontban is folytonos, tehát folytonos az egész $\mathbb{R}$-en, ezért a helyes válasz az (A).

12. $f_b'(1)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\dfrac{\dfrac{-2(x-1)}{x^2-x+1}}{x-1}=-\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\dfrac{2}{x^2-x+1}=-2$ és $f_j'(1)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\dfrac{\dfrac{2(x-1)}{x^2-x+1}}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\dfrac{2}{x^2-x+1}=2$ vagyis a deriválhatósági pontok halmaza $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, ami azt jelenti, hogy a helyes válasz a (B).

13. Szükséges tehát, hogy az elsőrendű derivált pozitív legyen. Deriválva kapjuk, hogy $f'(x)=\ln\dfrac{2}{3}\cdot\left(\left(\dfrac{4}{9}\right)^x-1\right)\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^x>0$ ha $x\geq0$, ezért a helyes válasz az (A).

14. Felírható: $f'(x)=\begin{cases} -\dfrac{x^2-1}{\left(x^2+1\right)^2} & \text{ha } x\le 0 \\ \dfrac{x^2-1}{\left(x^2+1\right)^2} & \text{ha } x>0 \end{cases}$ ahonnan szélsőérték pontok az $x=-1$ illetve $x=1$, ezért a helyes válasz a (C).

15. A függőleges asszimptóta miatt az x= -2 a nevezőnek a gyöke kell legyen, ezért *4-2a+b= 0.* másfelől $f'(x)=\dfrac{-x^2-2x+b-a}{(x^2+ax+b)^2}$ aminek $x=-1$ zérushelye kell legyen, ezért $-1-2+b-a=0$. Megoldva a két egyenletből álló egyenletrendszert kapjuk, hogy *a= 7* és *b= 10*, ezért a helyes válasz a (D).

16. Szükséges, hogy *m= 1* legyen, vagyis $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^2}{x^2+x}=1$ ahonnan *a= 1*, ezért a helyes válasz a (B).

17. A $D_{\max}=\mathbb{R}\setminus\{b\}$ alakú csak akkor, ha az $x^2+4x+a=0$ egyenlet esetén $\Delta=0$, ezért $a=4$ és $b=-2$, ami azt jelenti, hogy a helyes válasz az (E).

18. A derivált egyenlet: $x(x^2-x-2)=0$ aminek a gyökei $-1,0,2$. Elkészítjük a Rolle sorozatot a $-\infty,-1,0,2,+\infty$ esetén ez $+,-,-,-,+$ ami két előjelváltást jelent, ezért a valós gyökök száma kettő, így a helyes válasz az (A).

19. Legyen $f(x)=x^4+2x^3-x^2+x+2$, mivel $f(0)=2>0$ és $f(-1)=-1<0$, ezért az f(x)=0 egyenletnek van legalább egy gyöke a (-1, 0) intervallumban, ezért a helyes válasz a (C).

20. A $\cos x=0$ gyökei az egyenletnek nem megoldásai, ezért végig osztunk $\cos x$-el, kapjuk, hogy $tgx=x$. Készítsük el az $f(x)=tgx$ grafikus ábráját a $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ intervallumon, majd húzzuk be az $y=x$ egyenest. Ez az ábrát az $x=0$ abszcisszájú pontban metszi. Továbbá most rajzoljuk meg az $f(x)=tgx$ grafikus képét minden π hosszúságú intervallumon. Könnyen belátható, hogy minden ilyen intervallumon, az $y=x$ egyenes metszi az ábrát, tehát végtelen sok metszéspont van, ezért a helyes válasz a (D).

21. Az 1-nek egy szimmetrikus környezete $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ ahol $\varepsilon>0$ és egyedül a $(-\infty,5)$ tartalmaz egy ilyen alakú intervallumot, ezért a helyes válasz az (A).

22. Az $A=(2,\infty)$ nem környezete sem $-\infty$-nek, sem $+\infty$-nek, ezért a helyes válasz az (A).

23. Az $A=(-5,6)\cup(10,\infty)$ halmaz torlódási pontjainak a halmaza $[-5,6)\cup[10,\infty)$

24. Mivel létezik $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}=0$ vagyis van határérték, és a határérték pont az egyben torlódási pont is, ezért a helyes válasz a (B).

25. Az egyetlen halmaz amelynek vannak izolált pontjai az $A=\mathbb{Z}$.

7. Teszt. 12. osztályos algebra

1. Csoportosítsuk a kompoziciót:

$$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}*\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2}+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2=1$$. Ez a kompozíció trigonometriailag is kiszámítható: $a=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\cos 15^\circ$ illetve $b=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\sin 15^\circ$ ezért

$a*b=\cos 15^\circ\cdot\cos 15^\circ+\sin 15^\circ\cdot\sin 15^\circ=1$. Továbbá

$\frac{\sqrt{3}}{2}*1=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-1}+1\sqrt{1-\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}$, ezért a helyes válasz az (E).

2. Vegyük észre, hogy $(a\sqrt{5})\circ(-(a+1)\sqrt{5})=0$ és ilyen párból éppen 10 van, vagyis $\underbrace{0\circ 0\circ ...\circ 0}_{10-szer}=9\sqrt{5}=\sqrt{405}$ ezért $20<\sqrt{405}<21$, így a helyes válasz az (A).
3. Figyeljük meg, hogy $1*\frac{1}{2}=2$, $1*\frac{1}{2}*\frac{1}{3}=3$, $1*\frac{1}{2}*\frac{1}{3}*...*\frac{1}{2011}=2011$ így $1*\frac{1}{2}*\frac{1}{3}*...*\frac{1}{2012}=\frac{2011}{2012}+\frac{1}{2012}+2011=2012$ tehát a helyes válasz a (C).

4. Lépésről lépésre haladunk: $x*x=(2x-1)^2+\frac{1}{2}$,

$$x*x*x=(2x-1)(2x*x-1)+\frac{1}{2}=(2x-1)\left[2\left((2x-1)^2+\frac{1}{2}\right)-1\right]+\frac{1}{2}=$$

$=2(2x-1)^2+\frac{1}{2}$ és így lépésről lépésre adódik, hogy az

$a=\underbrace{x*x*x*...*x}_{2012-szer}=2^{2010}(2x-1)^{2012}+\frac{1}{2}$, ezért a helyes válasz az (A).

5. Mivel $x*e=e*x=x$ kell legyen, ezért $\frac{x-e}{1-ex}=\frac{e-x}{1-ex}$ ahonnan $e=x$ de ez lehetetlen, mert a semleges elem nem függ a változótól, ezért a helyes válasz a (B).
6. Kell teljesüljön, hogy $6*6=36-36-36+\alpha\geq 6$ ahonnan $\alpha\geq 42$. Másfelől $7*7=49-42-42+\alpha\leq 7$, ahonnan $\alpha\leq 42$. Ezért $\alpha=42$, ami azt jelenti, hogy a helyes válasz az (A).
7. Az asszociativítás axiómája szerint szükséges, hogy teljesüljön: $(x*y)*z=x*(y*z)$. Kiszámoljuk mind a két oldalt, és egyenlővé tesszük: $(x*y)*z=xyz-2xy-2yz-2zx-2x-2y+(\lambda-2)z-\lambda$ illetve $x*(y*z)=xyz-2xy-2yz-2zx+(\lambda-2)x-2y-2z-\lambda$ ahonnan $\lambda-2=4\Leftrightarrow\lambda=6$ adódik, ami azt jelenti, hogy a helyes válasz az (E).
8. Szükséges, hogy $x*y\geq 2$ legyen, ami azt jelenti, hogy $xy-2x-2y+\lambda\geq 2\Leftrightarrow(x-2)(y-2)+\lambda-6\geq 0$ és ha $x=y=2$ akkor $\lambda-6\geq 0$, ezért a helyes válasz a (D).

9. Szükséges, hogy $x*e=e*x=x$ legyen, ahonnan $xe-2x-2e+\lambda=x$ minden valós x értékre, ezért $x=0$ esetén is igaz, ahonnan $e=\frac{\lambda}{2}$ és ezt visszahelyettesítve kapjuk, hogy $x\frac{\lambda}{2}=3x$ minden valós x esetén, ezért $\lambda=6$, ami azt jelenti, hogy a helyes válasz a (B).
10. A művelet asszociatív kell legyen, és létezzen semleges elem. Tehát $(x*y)*z=x*(y*z)$, és kiszámítsuk mind a két oldal kifejezését: $(x*y)*z=xyz-axy-byz-azx+a^2x+aby-bz$ valamint $x*(y*z)=xyz-axy-byz-bzx-ax+aby+b^2z$ ahonnan $a=b$ és $a^2=-a,\ b^2=-b$. Tehát $a=b=0$ vagy $a=b=-1$. Ezekkel a feltételekkel ellenőrizzük a semleges elem létezését is, és azonnal kapjuk, hogy teljesülnek az $x*e=e*x=x$ feltételek. Tehát a helyes válasz a (C).
11. A művelet asszociatív kell legyen, kell legyen semleges elem és minden elem invertálható kell legyen. $\left(x*y\right)*z=\sqrt[n]{\left(x*y\right)^n+z^n}=\sqrt[n]{x^n+y^n+z^n}=x*\left(y*z\right)$, továbbá $x*e=e*x=x$, ahonnan $\sqrt[n]{x^n+e^n}=x$ így *x*= *0*. Továbbá $x*x'=x'*x=0$ vagyis $\sqrt[n]{x^n+(x')^n}=0$ ezért $(x')^n=-x^n$ így hát muszáj, hogy az $n=2k+1$ páratlan legyen, és erre $x'=-x$. Tehát a helyes válasz a (D).
12. Szükséges, hogy $f(x*y)=f(x)\circ f(y)$ vagyis $a(x*y)+1=$ $=(ax+1)+(ay+1)-5$ vagyis $a(x+y-2)+1=(ax+1)+(ay+1)-5$ ahonnan $-2a+1=-3$, ezért $a=2$, ami azt jelenti, hogy a helyes válasz a (C).
13. Mivel a 3 relatív prím az 5-tel, ezért a 3-nak van inverze, és ez éppen 2. Ezért szorozzuk be az első egyenlet mindkét oldalát 2-vel, így kapjuk, hogy $x+4y=\hat{3}$ ahonnan $x=y+\hat{3}$ ezért ha sorra feladjuk az *y*-nak a $\mathbb{Z}_5=\left\{\hat{0},\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\right\}$ pontosan öt darab x értéket kapunk, ezért a helyes válasz az (E).

14. Készítsük el az f értéktáblázatát: $\begin{array}{c|ccccc} x & \hat{0} & \hat{1} & 2 & \hat{3} & 4 \\ \hline f(x) & \hat{3} & a+4 & 2a+\hat{1} & \hat{3}a & 4a+2 \end{array}$ Az alsó sorban egyidőben két nulla kell legyen, és ez csak akkor lehetséges, ha $2a+\hat{1}=4a+2$ ahonnan $a=2$ ami azt jelenti, hogy a helyes válasz a (C).

15. Mivel $(X-1)(X-2)(X-3)...(X-99)(X-100)=$
$=X^{100}-(1+2+...+100)X^{99}+...+1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 100$ ezért az X^{99} együtthatója $1+2+...+100=\dfrac{101\cdot 100}{2}=5050$ ezért a helyes válasz a (B).

16. Szükséges, hogy $f(1)=f(-1)=0$ legyen, ahonnan $(-1)^n+1=0$ ami akkor igaz, ha $n=2k-1$, ezért a helyes válasz a (C).

17. A három gyök legyen $\alpha-r,\ \alpha,\ \alpha+r$ és a Viéte összefüggések alapján $\alpha-r+\alpha+\alpha+r=3$, ahonnan $\alpha=1$ ami azt jelenti, hogy $x=1$ gyöke az egyenletnek, ezért $1-3+2-a=0$ ahonnan $a=0$, ezért a helyes válasz az (A).

18. A dupla gyök a derivált egyenletből származik, vagyis az $x^2-2x+1=0$ egyenletből, ami csak $x=1$ lehet, ezt visszaírva az eredeti egyenletbe kapjuk, hogy $x^3-3x^2+2x=0$, de ennek az egyenletnek nincsenek dupla gyökei, ezért a helyes válasz az (E).

19. A Viéte összefüggések alapján tehát $x_1+x_2+x_3=3$ ahol a gyökök természetes számok, ezért csak $0+1+2=3$ vagy $1+1+1=3$. Az első esetben x= 0 gyök, ezért *a= 0*, a második esetben x= 1 esetben $1-3+2-a=0$ ahonnan ugyancsak *a= 0* adódik tehát a helyes válasz az (A).

20. Adjuk hozzá az első és második oszlopot a harmadik oszlophoz:

$$\Delta=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_1+x_2+x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1+x_2+x_3 \\ x_3 & x_1 & x_1+x_2+x_3 \end{vmatrix}=(x_1+x_2+x_3)\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ x_2 & x_3 & 1 \\ x_3 & x_1 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1-x_1^2-x_2^2-x_3^2)=$$

$$=(x_1+x_2+x_3)(3x_1x_2+3x_2x_3+3x_3x_1-(x_1+x_2+x_3)^2)=2(3\cdot 2-4)=4\,.$$

Ezért a helyes válasz a (B).

21. Mivel $(6,\ 2)=2$ és $(6,\ 3)=3$ ezért a 2 és a $\hat{3}$ nem invertálhatók a $\mathbb{Z}_6$-ban. De összeadva a két egyenletet $\hat{5}(x+y)=\hat{5}$ amit $\hat{5}$-tel beszorozva $x+y=\hat{1}$ vagyis $y=\hat{5}x+1$ adódik, és $x\in\{\hat{0},\ \hat{1},\ 2,\ \hat{3},\ 4,\ \hat{5}\}$ mind megoldás, amelyekre megkapjuk a hat y megoldást. Tehát a feladatra a helyes válasz az (E).

22. Vegyük észre, hogy $2\circ x=x\circ 2=\dfrac{4(x+2)}{4+2x}=2$, ezért ha a műveletsorban a $\dfrac{8}{4}=2$ tagon kívül a többi részt x-el jelöljük, akkor $x\circ 2=2$ vagyis a helyes válasz a (B).

23. Legyen $x=k$ egy gyök, így $4x-12=128p$ ahonnan $x=3+32p$ így $x\in\{\hat{3},\ 35,\ 67,\ 99\}$ vagyis a helyes válasz a (C).

24. Mivel 48: 12= 4, ezért az esedékes elemek $\hat{0},\ 4,\ \hat{8},\ 12,\ 16,\ 20,\ 24,\ 28,\ 32,\ 36,\ 40,\ 44$ és ezek közül csak azok felelnek meg, amelyeknél a 12 a legkisebb olyan elem, amelyre $12x=48$. Csak négy ilyen elem van, a $4,\ 20,\ 28,\ 44$, a többi esetben létezik olyan $k<12$ szám amelyre $kx=48$ .Ezért a helyes válasz a (C).

25. Mivel $x^{14}=e\ \forall x\in G$, ezért a halmaznak pontosan 14 eleme van, így a helyes válasz az (A).

8. Teszt. 12. osztályos analízis

1. A primitív értelmezése alapján $F'(x)=f(x)$, ezért $f(x)=1+\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ ahonnan $f(0)=1$, tehát a helyes válasz az (A).

2. $F(x)=\dfrac{x^3}{3}+C$, de $F(3)=10$, így $9+C=10$ ahonnan $C=1$, tehát $F(-3)=-9+1=-8$, ezért a helyes válasz a (D).

3. Mivel $f:(-\infty,0)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{x}$, az összes primitív függvény $F(x)=\ln(-x)+\ln C=\ln(-Cx)$, ezért a felsoroltak közül csak a $\ln(-2x)$ felel meg, ezért a helyes válasz a (D).

4. Szükséges, hogy f folytonos legyen, de ez csak az x= 0 pontban merül fel, és mivel $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, ezért muszáj hogy a= 1 legyen, így a helyes válasz a (B).

5. $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=3$ ahonnan $\ln f(x)=3x+C$ vagyis $f(x)=e^{3x+C}$, de $f\left(0\right)=\ 2$, így $e^{C}=2$ ahonnan $C=\ln 2$, tehát $f(\ln 2)=e^{3\ln 2+\ln 2}=e^{4\ln 2}=e^{\ln 2^4}=4$, így a helyes válasz a (B).

6. Mivel $\dfrac{1}{x^4+3x^2+2}=\dfrac{1}{(x^2+1)(x^2+2)}=\dfrac{1}{x^2+1}-\dfrac{1}{x^2+2}$ ezért $F(x)=arctgx-\dfrac{1}{\sqrt{2}}arctg\dfrac{x}{\sqrt{2}}+C$, ezért a helyes válasz a (C).

7. $I=arctgx^2\Big|_0^1=\dfrac{\pi}{4}$, ezért a helyes válasz a (D).

8. Mivel $F'(x)=f(x)=e^{x^2}+x$ ezért $F'(1)=f(1)=e+1$ így a helyes válasz a (B).

9. Az $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin^2 x+1}$ függvény páros, mert $f(-x)=f(x)$, így $I=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\sin^2 x+1}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{d(\sin x)}{\sin^2 x+1}dx=2arctg(\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$, ezért a helyes válasz az (A).

10. Az $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sin^2 x+1}$ függvény páratlan, mert $f(-x)=-f(x)$, így J= 0 ezért a helyes válasz a (D).

11. Mivel $\dfrac{x(2x^2+1)}{x^4+x^2+1}=\dfrac{2x^3+x}{x^4+x^2+1}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\left(x^4+x^2+1\right)'}{x^4+x^2+1}$ ezért

$I=\dfrac{1}{2}\ln(x^4+x^2+1)\Big|_0^1=\dfrac{1}{2}\ln 3$, így a helyes válasz a (C).

12. Ha $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$, ezért $f(-x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}=-\ln\dfrac{1-x}{1+x}=-f(x)$ vagyis a függvény páratlan, ezért I= 0, így a helyesválasza (C).

13. Mivel $\dfrac{x^2+1}{x^3+3x+5}=\dfrac{1}{3}\dfrac{3x^2+3}{x^3+3x+5}=\dfrac{1}{3}\dfrac{\left(x^3+3x+5\right)'}{x^3+3x+5}$ ezért

$I=\dfrac{1}{3}\ln(x^3+3x+5)\Big|_{-1}^{1}=\dfrac{1}{3}\ln 9=\dfrac{2}{3}\ln 3$ ezért a helyes válasz a (B).

14. $I=\displaystyle\int_1^2\frac{dx}{x^3+x}=\int_1^2\frac{xdx}{x^4+x^2}=\int_1^2\frac{dx^2}{x^4+x^2}=\int_1^4\frac{dy}{y^2+y}=\int_1^4\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{y+1}\right)=$

$\left(\ln y-\ln(y+1)\right)\Big|_1^4=\ln\dfrac{y}{y+1}\Big|_1^4=\ln\dfrac{8}{5}$, ezért a helyes válasz az (A).

15. Legyen $F(x)=\displaystyle\int_{-x}^{x}\frac{e^t\cos t}{1+e^t}dt\Rightarrow F'(x)=\frac{e^x\cos x}{1+e^x}+\frac{e^{-x}\cos(-x)}{1+e^{-x}}=\cos x$ tehát $F(x)=\sin x+c$ és mivel F(0)= 0, ezért F(x)= sinx, így a helyes válasz a (D).

16. Mivel $f^{-1}(f(x))=x$, ezért végezzük el a $t=f(x)$ változócserét, és kapjuk, hogy $I=\displaystyle\int_0^1 xf'(x)dx=\int_0^1 x(3x^2+1)dx=\frac{5}{4}$, ezért a helyes válasz az (E).

17. L'Hospital tételét alkalmazzuk kétszer:

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\int_1^x t\ln t dt}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{F(x)-F(1)}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$, ezért a helyes válasz az (A).

18. A fogó tételét alkalmazzuk, miszerint $nx-1<[nx]\leq nx$ amit integrálva kapjuk, hogy $\frac{n}{2}-1<\int_0^1[nx]dx\leq\frac{n}{2}$ ezért $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n}-\frac{1}{n}\right)<\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^1[nx]dx\leq\frac{1}{2}$ így $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^1[nx]dx=\frac{1}{2}$, ezért a helyes válasz a (D).

19. $T=\int_0^1\frac{2x}{x^2+1}dx=\int_0^1\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}=\ln(x^2+1)\Big|_0^1=\ln 2$, ezért a helyes válasz a (B).

20. $V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sqrt{\cos 2x}}{\sin x+\cos x}\right)^2dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{1+\sin 2x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d(1+\sin 2x)}{1+\sin 2x}=$

$=\frac{\pi}{2}\ln(1+\sin 2x)=\frac{\pi}{2}\ln 2$, ezért a helyes válasz az (A).

21. Az $f(x)=\frac{3x^2}{1+x^6}$ függvény páros, ezért $I=\int_{-1}^1\frac{3x^2}{1+x^6}dx=2\int_0^1\frac{3x^2}{1+x^6}dx=$

$2\int_0^1\frac{d(x^3)}{(x^3+1)}=2arctgx^3\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}$, ezért a helyes válasz a (B).

22. A Lagrange-féle középérték tételt alkalmazzuk az $[n,n+1]$ intervallumon az $F(x)=arctg\,\frac{x}{x+1}$ függvényre, miszerint létezik olyan $c_n\in[n,n+1]$ amelyre $F(n+1)-F(n)=\int_n^{n+1}arctg\,\frac{x}{x+1}dx=arctg\,\frac{c_n}{c_n+1}$. És mivel $\lim_{n\to\infty}c_n=+\infty$, ezért

$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+1}arctg\,\frac{x}{x+1}dx=\lim_{n\to\infty}arctg\,\frac{c_n}{c_n+1}=arctg1=\frac{\pi}{4}$,

ezért a helyes válasz a (D).

23. Parciálisan integrálva kapjuk, hogy

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^x \sin nx dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^x \left(-\frac{\cos nx}{n}\right)' dx = -\frac{e^x \cos nx}{n}\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^x \cos nx dx = \frac{1}{n} a_n \,.$$

Az $a_n = -e^{\pi} \cos n\pi + e^{\frac{\pi}{2}} \cos n\frac{\pi}{2} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^x \cos nx dx$ sorozat korlátos, mert

$\left|a_n\right| \le e^{\frac{\pi}{2}} + e^{\pi} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^x dx$ minden $n \ge 1$ esetén, ezért

$\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^x \sin nx dx = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} a_n = 0$, így a helyes válasz az (A).

24. A fogótétel szerint $0 \le \int\limits_0^1 x^{2n} e^x dx \le e\int_0^1 x^{2n} dx = e\frac{1}{2n+1}$ így

$\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 x^{2n} e^x dx = 0$, ezért a helyes válasz az (A).

25. A fogótételt alkalmazzuk, miszerint $\frac{1}{2}\frac{x^n + x^{n+1}}{1+x} \le \frac{x^n}{1+x} \le \frac{1}{2}\frac{x^n + x^{n-1}}{1+x}$

amit integrálva kapjuk, hogy: $\frac{n}{2(n+1)} \le n\int\limits_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \le \frac{1}{2}$ és itt a

határértékre térve kapjuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} n\int\limits_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = \frac{1}{2}$, ezért a helyes válasz

az (E).